

João Manuel R. S. Tavares

Comunicação Interna:

**APRESENTAÇÃO DE UMA ABORDAGEM MODAL PARA
A DETERMINAÇÃO DA CORRESPONDÊNCIA ENTRE
PIXELS DE DOIS CONTORNOS NÃO RÍGIDOS**



FEUP - *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*

DEEC - *Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores*



INEB - *Instituto de Engenharia Biomédica*

Outubro de 1997

Sumário

Nesta comunicação é apresentado um método, proposto por Shapiro, para a determinação da correspondência entre os *pixels* que constituem dois contornos não rígidos. Este método teve como base o proposto por Scott e Longuet-Higgins, denominado por “princípio do mapeamento da distância mínima”, que também é apresentado nesta comunicação.

A influência dos parâmetros de controlo do método e da transformação rígida existente entre os dois contornos é discutida e analisada através de alguns resultados experimentais obtidos por uma implementação do método apresentado.

São também apresentadas algumas conclusões e perspectivas de benefício do método proposto por Shapiro.

1 - Introdução

A determinação da correspondência é um problema, genérico no domínio da visão computacional, no qual é necessário obter o emparelhamento dos elementos de duas entidades relacionadas. Este problema pode ser verificado, a título de exemplo, nas seguintes áreas: na visão estéreo [Tavares, 1995, 1995a], obtenção da estrutura a partir do movimento [Tavares, 1995, 1995a], reconhecimento baseado em modelos, navegação, fluxo óptico, segmentação, análise do movimento rígido e não rígido, etc.

Basicamente existem duas abordagens¹ para a resolução deste problema: as baseadas no nível de intensidade (fluxo óptico) e as baseadas no seguimento dos elementos característicos das entidades em questão (*tokens*). A primeira pode ser aplicada directamente sobre as imagens da sequência; enquanto a segunda, necessita da prévia determinação dos elementos característicos (por exemplo: vértices, pontos de máxima curvatura, rectas, *pixels*, *edges*, etc.). Uma das vantagens que a segunda abordagem apresenta é uma maior robustez permitindo que a sequência de imagens seja amostrada mais espaçadamente. Esta abordagem é a seguida no método apresentado nesta comunicação para a determinação da correspondência entre os *pixels* que constituem dois contornos não rígidos. Este método baseia-se na descrição modal da forma e foi proposto, e apresentado, por Shapiro [Shapiro 1991, 1992, 1992a] tendo como base o método proposto por Scott e Longuet-Higgins denominado, nestas referências, por “princípio do mapeamento da distância mínima”.

Em primeiro lugar será apresentado o método de base, serão discutidas as suas vantagens e, do mesmo modo, algumas desvantagens inerentes. Após esta apresentação, é descrito o método proposto por Shapiro, o comportamento do mesmo será analisado através de resultados experimentais obtidos por uma sua implementação. Será também discutida a influência dos parâmetros de controlo do método e da transformação rígida² existente entre os dois contornos (composta por uma rotação em torno de um eixo que passa pela origem, um escalonamento em relação à origem e uma translação). Finalmente serão apresentadas algumas conclusões e perspectivas de benefício do método proposto por Shapiro.

2 - Método do princípio do mapeamento da distância mínima

Scott e Longuet-Higgins propuseram um método para emparelhamento de *pixels* entre dois contornos em consonância com a filosofia do “mapeamento mínimo” de Ullman. No método proposto, é incorporada uma medida de afinidade entre *pixels* (baseada na distância entre elementos) e um esquema de concorrência permitindo *pixels* candidatarem-se a um dado emparelhamento. Este critério foi formulado segundo um princípio de proximidade (favorecendo emparelhamentos através de distâncias o mais reduzidas possíveis) e um de exclusão (favorecendo o emparelhamento de um para um). O mapeamento resultante, efectivamente, minimizara a soma total do quadrado das distâncias percorridas pelos *pixels* tendo como restrição o emparelhamento de um para um.

¹ Ullman [Shapiro, 1991] refere que o sistema humano de visão utiliza, para diferentes propósitos, as duas abordagens: a baseada em intensidade e a baseada no seguimento de primitivas. Dois mecanismos independentes operam: o de alcance curto e o de alcance longo. O mecanismo de alcance curto mede o movimento contínuo, servindo como sistema periférico, sistema de vigilância e de segmentação dos objectos que se movem na cena. O mecanismo de alcance longo mede o movimento discreto e tem um papel importante na obtenção da estrutura 3D. Estes dois sistemas baseiam as correspondências em diferentes primitivas: o de alcance curto processa-se considerando a intensidade enquanto o de alcance longo considera os elementos característicos.

² Em [Foley, 1991; Hall 1993; Tavares, 1995, 1995a] são apresentadas as várias transformações geométricas em 2D e em 3D; em [Tavares, 1997] é apresentado um método, inicialmente proposto em [Horn 1987], para a determinação da transformação rígida entre dois contornos constituídos por *pixels*.

Uma boa característica deste método é a possibilidade de implementá-lo, de forma elegante, através de uma solução bem condicionada para a determinação dos vectores próprios que não envolve iterações. Como entrada, o método recebe um conjunto de m pixels ($\vec{X}_{i,t}$) de um contorno t e um conjunto de n pixels ($\vec{X}_{j,t+1}$) de um contorno $t+1$. A computação é composta por três etapas, *Figura 1*.

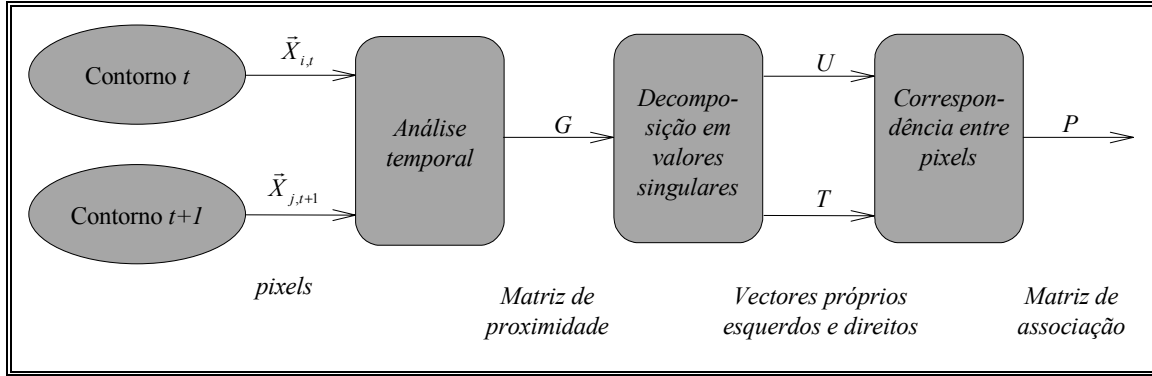


Figura 1 - Etapas do método do mapeamento da distância mínima.

A primeira etapa consiste na enumeração de todos os pares de emparelhamento e guardar as suas afinidades numa matriz de proximidade G , em geral, não simétrica. Cada elemento G_{ij} representa a atracção entre o *pixel* i do contorno t e o *pixel* j do contorno $t+1$ através de uma distância métrica Gaussiana ponderada³:

$$G_{ij} = e^{-d_{ij}^2/2\sigma^2}, \quad i = 1...m, \quad j = 1...n$$

onde $d_{ij}^2 = \|\vec{X}_{i,t} - \vec{X}_{j,t+1}\|^2$ é o quadrado da distância Euclidiana entre os dois *pixels*. Deste modo G_{ij} varia de 0, para *pixels* bastante separados ($d_{ij} = \infty$), a 1 para *pixels* coincidentes ($d_{ij} = 0$). O parâmetro σ controla a largura da curva Gaussiana e, desta forma, o grau de interacção entre os dois conjuntos de *pixels*. De forma simplista, este parâmetro pode ser encarado como a colocação de um pequeno círculo centrado num *pixel* do contorno t e permitir que este interactue com os *pixels* do contorno $t+1$ interiores a este círculo. Assim, um valor reduzido para σ favorece as interacções locais, enquanto um valor mais elevado permite iterações mais globais.

A segunda etapa consiste na realização da decomposição em valores singulares (SVD) [Chapra, 1988; Press, 1992; Tavares, 1995] da matriz G , por exemplo, exprimir G como

$$G = TDU.$$

As matrizes T e U são ortogonais (as linhas, e colunas, são mutuamente perpendiculares e têm amplitude unitária). A matriz D contém os valores singulares positivos ao longo da diagonal e em ordem decrescente ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$). Por analogia com sistema físicos de partículas vibratórias e com vibrações mecânicas, os vectores próprios associados a elevados

³ A utilização desta distância métrica prende-se com:

- provavelmente a matriz G resultante ser definida positivamente;
- G_{ij} decrescer com o aumento da distância, variando de 1 para *pixels* coincidentes ($r_{ij} = 0$) e 0 para os bastante distantes ($r_{ij} = \infty$).

valores singulares podem ser denominados por vectores próprios de baixa frequência, enquanto os associados a reduzidos valores próprios por vectores próprios de alta frequência.

A última etapa consiste no cálculo da correlação (no sentido do produto escalar) entre as linhas da matriz T e as colunas da matriz U , resultando a matriz de associação P ,

$$P = TEU,$$

onde a matriz E é obtida por substituição dos elementos da diagonal da matriz D por 1. Deste modo o elemento P_{ij} indica a força de atracção entre os *pixels* $\vec{X}_{i,t}$ e $\vec{X}_{j,t+1}$, onde 1 indica um emparelhamento perfeito e 0 um falso emparelhamento. A correspondência entre dois *pixels* só deve ser classificada como forte caso P_{ij} seja máximo na sua linha e na sua coluna, o que significa que ambos os *pixels* reclamam um pelo outro para um bom emparelhamento. Quando P_{ij} é apenas máximo na sua coluna mas não na sua linha (ou vice-versa), uma correspondência fraca está implícita com vários *pixels* competindo para o mesmo emparelhamento.

Este método maximiza o traço de $T^T G$; por outras palavras, a matriz P é uma máscara que actua sobre a matriz G e selecciona os elementos de valor mais elevado. Como G_{ij} é elevado quando d_{ij}^2 é reduzido, é garantido um mínimo para o quadrado total da distância de mapeamento. Isto pode ser verificado intuitivamente quando se imagina pedaços de fio a ligar os *pixels* emparelhados com o objectivo de minimizar a quantidade total de fio utilizado; contudo, ao mesmo tempo, P é ortogonal, e assim apenas só pode existir um elemento máximo por linha ou coluna. Desta forma, nenhum *pixel* do contorno t pode ser fortemente emparelhado com mais do que um *pixel* do contorno $t+1$, garantindo-se o princípio da exclusão.

Deve-se notar que, para o emparelhamento, não são as formas absolutas dos vectores próprios que são importantes mas sim a similaridade relativa entre estas.

Resultados empíricos, [Shapiro 1991, 1992, 1992a], demonstram que o método obtém com sucesso a correspondência para *pixels* com movimento 2D de translação, expansão e corte. Uma prova teórica confirma que o método recupera sempre estes mapeamentos deste que σ seja suficientemente elevado. A investigação de Shapiro, [Shapiro 1991, 1992, 1992a], da aplicação deste método em objectos reais confirma estas características, contudo desperta algumas fraquezas:

- Primeira, o método não funciona com sucesso quando existem rotações elevadas no plano imagem. Este insucesso é a consequência do tratamento de igualdade para todos os *pixels*; isto é, sem entrar em consideração com a estrutura presente no contorno (por exemplo, restrições de continuidade: *pixels* vizinhos do contorno t devem conservarem-se vizinhos no contorno $t+1$).
- Segunda, características de implementação podem fazer com que a consideração de valores elevados para σ não seja razoável pois força os valores singulares para zero. Consequentemente, algumas colunas da matriz T (e linhas da matriz U) tornam-se instáveis e a matriz de associação torna-se incorrecta. Este fenómeno é tão importante que, por vezes, com uma simples translação 1D os emparelhamentos não são determinados satisfatoriamente, apesar de o efeito exacto variar de computador para computador (dependendo do processador matemático).

- Terceira, quando a distorção existente entre os dois contornos é elevada, o método não determina os emparelhamentos de maneira satisfatória uma vez que a forma dos vectores próprios reflecte tal distorção. Tal efeito pode ser atenuado pelo aumento do valor de σ utilizado (contudo, tal aumento implica efeitos colaterais, ver a consideração anterior) e/ou pela consideração, no emparelhamento, de apenas uma percentagem dos primeiros modos.
- Quarta, por vezes os vectores próprios obtidos são incorrectos⁴ (devido a problemas numéricos: o valor utilizado para σ ser elevado) fazendo com que a consideração dos modos de frequências mais elevadas piore o emparelhamento obtido utilizando-se apenas os modos de frequências mais reduzidas. A solução, para tal problema, passa pela consideração de apenas uma percentagem dos primeiros modos.
- Quinta, por vezes, quando existem muitos *pixels* a emparelhar e é necessário uma truncagem dos vectores próprios a considerar, os vectores remanescentes são insuficientes para obter-se um emparelhamento satisfatório.

O valor utilizado para o parâmetro σ é vital para o sucesso do método, basta verificar-se que σ , por si só, faz variar a matriz de proximidade G entre todos os elementos nulos ($\sigma=0$) e todos unitários ($\sigma=\infty$). Shapiro em [Shapiro 1991] apresenta algumas observações básicas há cerca do valor de σ :

- Para σ reduzidos, os valores singulares são todos quase nulos.
- Quando σ aumenta, os valores singulares de baixa frequência aumentam mais rapidamente que os restantes.
- Para σ elevados, apenas o primeiro valor singular é significativo (com valor aproximadamente igual ao número de *pixels*).
- O valor utilizado para σ deve ser suficientemente elevado. Em tal situação, os vectores próprios são estáveis e o primeiro é completamente plano. Infelizmente, como já foi referido, um valor elevado para σ faz com que os valores singulares de elevada frequência sejam reduzidos tornando-se necessário uma truncagem dos vectores próprios.

Desta forma um balanço entre estes dois extremos é necessário; de forma empírica Shapiro propõe para o valor de σ a distância entre os centroides dos dois contornos.

A robustez deste método poderia ser aumentada com a consideração da estrutura de cada contorno no emparelhamento. O valor mais adequado para o parâmetro σ poderia ser determinado, de forma automática, se o método fosse iterativo de forma a parar quando os primeiros vectores próprios esquerdos e direitos fossem quase planos. Evidentemente que este processo seria demasiado custoso em termos computacionais o que implicaria uma implementação paralela do mesmo. Actualmente existem muitas implementações da decomposição SVD em paralelo e de domínio público.

⁴ Quanto mais elevada a frequência do modo maior será o erro associado ao respectivo vector próprio.

2.1 - Um exemplo de aplicação do método

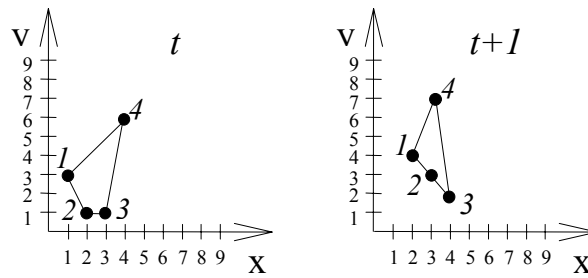


Figura 2 - Dois contornos, cada qual com quatro pixels, para serem emparelhados. O contorno $t+1$ é uma versão distorcida do contorno t , e foi movido para cima e para a direita. Os pixels foram etiquetados de forma arbitrária e a solução correcta para o emparelhamento é 1-1, 2-2, 3-3 e 4-4.

Dois contornos estão representados na Figura 2, [Shapiro 1991], e o objectivo é a obtenção da correspondência correcta. Seleccionado $\sigma = 3$ obtemos a seguinte matriz de proximidade:

$$G = \begin{bmatrix} 0.895 & 0.801 & 0.574 & 0.329 \\ 0.607 & 0.758 & 0.758 & 0.128 \\ 0.574 & 0.801 & 0.895 & 0.135 \\ 0.641 & 0.574 & 0.411 & 0.895 \end{bmatrix}.$$

Executando a decomposição da matriz de proximidade em valores singulares verifica-se que a forma dos vectores próprios esquerdos (colunas de T) corresponde razoavelmente bem com a forma dos vectores próprios direitos (linhas de U):

$$T = \begin{bmatrix} 0.539 & -0.034 & 0.812 & 0.223 \\ 0.482 & 0.355 & -0.086 & -0.796 \\ 0.515 & 0.441 & -0.477 & 0.560 \\ 0.461 & -0.824 & -0.326 & -0.053 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0.544 & 0.587 & 0.527 & 0.287 \\ -0.123 & 0.169 & 0.420 & -0.883 \\ 0.710 & 0.058 & -0.595 & -0.371 \\ 0.430 & -0.790 & 0.437 & -0.003 \end{bmatrix}.$$

Gráficos destes vectores próprios estão representados na Figura 3, onde o eixo x indexa os *pixels*; por exemplo, o gráfico em baixo e à esquerda representa as componentes do primeiro vector próprio esquerdo, T_1 (a primeira coluna de T). Finalmente, determina-se a matriz de associação P , estabelecendo os emparelhamentos desejados entre os *pixels* dos dois contornos:

$$P = \begin{bmatrix} \underline{0.9695} & 0.1816 & -0.1158 & -0.1174 \\ -0.1864 & \underline{0.9667} & 0.1065 & -0.1409 \\ 0.1272 & -0.0938 & \underline{0.9852} & -0.0663 \\ 0.0980 & 0.1543 & 0.0681 & \underline{0.9808} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz deverá ser interpretada da seguinte forma: as linhas referem-se aos *pixels* do contorno t enquanto a colunas aos *pixels* do contorno $t+1$. Os elementos da diagonal (sublinhados) apresentam, claramente, uma supremacia nas linhas e colunas respectivas. Assim o primeiro *pixel* do contorno t é emparelhado com o primeiro *pixel* do contorno $t+1$ e por aí adiante. A razão para que os valores da matriz P sejam fracções, em vez de uns e zeros, deve-se ao facto dos contornos não serem iguais (se não houvesse distorção entre os dois contornos a matriz P seria a matriz identidade).

Note-se que se a ordem de indexação dos *pixels* dos contornos fosse alterada as colunas das matrizes G , P e U seriam trocadas de forma a reflectir tal alteração (a matriz T não sofreria alterações). Desta forma as alterações na matriz P asseguram que o emparelhamento final obtido seja correcto, fazendo com que o método seja invariante à ordem de indexação dos *pixels* dos contornos a considerar.

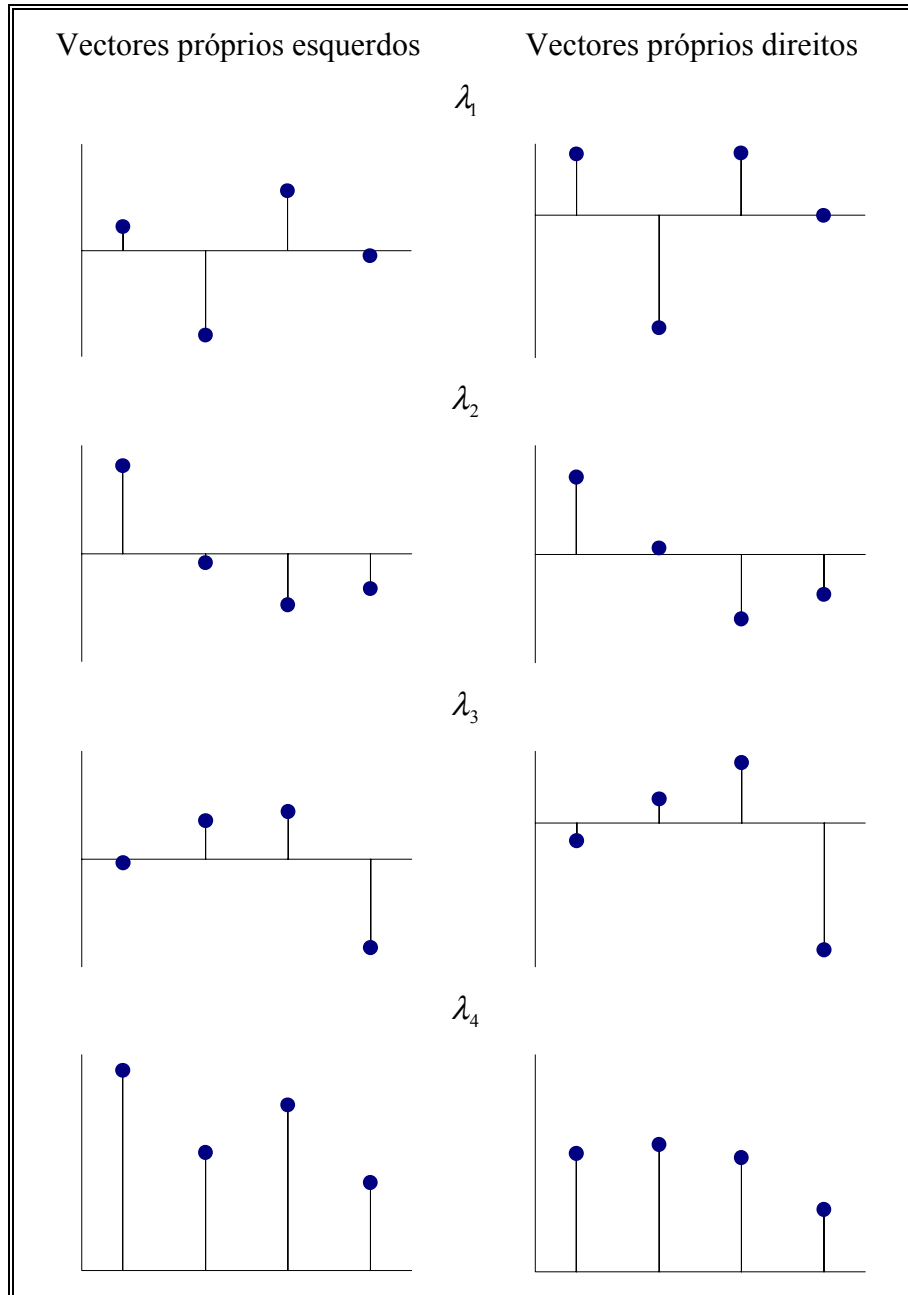


Figura 3 - Representação dos vectores próprios esquerdos e direitos segundo ordem crescente de frequências (A frequência é o inverso do respectivo valor singular.). Desta representação torna-se evidente que os emparelhamentos correctos deverão ser 1-1, 2-2, 3-3 e 4-4.

3 - Método da descrição modal da forma

Para desenvolvimento de um método, para emparelhamento de *pixels* que constituem dois contornos, Shapiro baseou-se no método descrito no ponto anterior e tentou superar as suas fraquezas. Tornou-se claro que, para resolver os problemas associados às rotações, a estrutura

inerente a cada contorno deveria ser considerada; necessitando-se assim, de uma representação da forma. Inicialmente o método proposto por Shapiro analisa individualmente cada contorno para extracção dos respectivos modos e seguidamente, utiliza estes modos para o estabelecimento das correspondências. Essencialmente os modos codificam a forma do contorno baseando-se nas distâncias entre *pixels*, de tal forma que constituem uma descrição da mesma.

Para uma compreensão intuitiva da abordagem considere-se um contorno com m *pixels* e suponha-se que se define um conjunto de m eixos que represente um sistema de coordenadas num espaço de dimensão m . A cada *pixel* é então associado uma coordenada neste espaço de maior dimensão; por exemplo, cada *pixel* é mapeado a partir do plano imagem 2D num hiperespaço de m eixos. Shapiro realiza este mapeamento independentemente para cada contorno e, quando as formas dos contornos são similares, *pixels* que deverão ser associados irão coincidir no hiperespaço. São apresentados nos pontos seguintes o algoritmo para o método proposto por Shapiro, alguns resultados experimentais obtidos e análise dos mesmos.

3.1 - Algoritmo para o método proposto por Shapiro

Considere-se em primeiro como formar os modos de um único contorno com m *pixels* \bar{X}_i . Uma matriz quadrada de proximidade H é construída, guardando as distâncias entre *pixels* do contorno. Por outras palavras, são consideradas as distâncias no contorno em vez de distâncias entre contornos. Como no método proposto por Scott e Longuet-Higgins é utilizada a mesma medida Gaussiana ponderada,

$$H_{ij} = e^{-r_{ij}^2/2\sigma_x^2},$$

onde $r_{ij}^2 = \|\bar{X}_i - \bar{X}_j\|^2$. Evidentemente, H é simétrica ($r_{ij} = r_{ji}$) e os seus elementos da diagonal são unitários ($r_{ii} = 0$). O parâmetro σ_x , mais uma vez, controla a interacção entre *pixels*, com o índice x a enfatizar que a interacção ocorre entre *pixels* do mesmo contorno em vez de *pixels* em dois contornos distintos. Para σ_x reduzidos, cada *pixel* apenas tem conhecimento da sua vizinhança local; enquanto para σ_x elevados, cada *pixel* é influenciado mais globalmente. Como as duas análises são processadas independentemente, o valor para σ_x pode ser diferente para os dois contornos, isto é σ_i e σ_{i+1} respectivamente.

De seguida, determinam-se os valores próprios λ_i e os vectores próprios E_i da matriz H ; por exemplo, resolvendo $HE_i = \lambda_i E_i$, $i = 1...m$. (Shapiro, em [Shapiro, 1991], prova que os valores singulares de valor mais elevado têm maior peso na composição da matriz H do que os de valor mais reduzido.)

Os vectores próprios são de comprimento unitário e mutuamente ortogonais e, deste modo, formam uma base ortonormal. São apelidados de modos por analogia com as vibrações em sistemas mecânicos, cujos vectores próprios descrevem os modos de vibração [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986]. Na forma matricial, $H = VDV^T$.

A matriz diagonal D contém os valores próprios (todos positivos pois a matriz H é definida positivamente) ao longo da sua diagonal e de forma decrescente: $D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$. A matriz modal V é ortogonal e tem os vectores próprios como os seus vectores coluna (por exemplo, $V = [E_1 | \dots | E_m]$). Cada linha da matriz V pode ser referida como um vector linha *pixel* F_i , contendo as m coordenadas modais do *pixel* i ; por exemplo, a expansão do *pixel* i do contorno ao longo dos m eixos modais:

$$V = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}.$$

Este processo de computação é executado simultaneamente para os dois contornos. Isto é, para o contorno t (m pixels) obtemos $H_t = V_t D_t V_t^T$ enquanto para o contorno $t+1$ (n pixels) obtemos $H_{t+1} = V_{t+1} D_{t+1} V_{t+1}^T$. Os vectores *pixel* associados são designados por $F_{i,t}$ e $F_{j,t+1}$.

A etapa final é a determinação da correlação entre os dois conjuntos de vectores *pixel*, resultando a matriz de associação Z . Como no caso anterior, Z_{ij} traduz a confiança na correspondência entre os *pixels* $\bar{X}_{i,t}$ e $\bar{X}_{j,t+1}$. Neste caso, três pontos deverão ser notados:

- Primeiro, devido aos contornos terem, possivelmente, diferentes números de *pixels* os números de modos serão diferentes. A solução passa pela truncagem dos $|m-n|$ modos menos significativos do contorno com mais *pixels*, onde os menos significativos são indicados pelos valores próprios mais reduzidos. Desta forma as matrizes modais terão k colunas (ou modos), onde $k = \min\{m, n\}$ (em realizações práticas poderão ser utilizados menos de k modos, conseguindo-se deste modo uma maior imunidade ao ruído: por analogia com a transformada de Fourier). Efectivamente, com este procedimento são desprezadas as componentes dos vectores *pixel* ao longo dos eixos menos importantes.
- Segundo, o sinal de cada vector próprio não é único, pois invertendo a sua direcção não viola-se a ortonormalidade da base, assim é necessário que ambos os conjuntos de eixos tenham direcções consistentes pois deseja-se comparar directamente os vectores *pixel*. Desta forma devesse utilizar um procedimento de correcção do sinal. Resumidamente, Shapiro considera V_t como a base de referência e procede a orientação de cada eixo de V_{t+1} , um de cada vez, escolhendo para cada um a direcção que maximiza o alinhamento dos dois conjuntos de vectores *pixel*.
- Terceiro, a matriz de associação Z difere de P no facto de um emparelhamento perfeito é, neste método, indicando por 0, enquanto um valor de 2 indica um emparelhamento completamente falhado. Deste modo, os melhores emparelhamentos são indicados pelos elementos em Z que são mínimos na sua linha e na sua coluna. Os valores Z_{ij} são obtidos considerando a distância Euclidiana entre os vectores *pixel*

$$Z_{ij} = \|F_{i,t} - F_{j,t+1}\|^2,$$

em vez dos seus produtos escalares. A vantagem deste procedimento é a robustez à truncagem dos modos não necessários, melhoramento da sensibilidade (devido a um aumento da gama de valores) e uma interface conveniente para o algoritmo de correcção do sinal.

Na *Figura 4* são descritas as várias etapas que constituem o algoritmo do método da descrição modal da forma proposto por Shapiro.

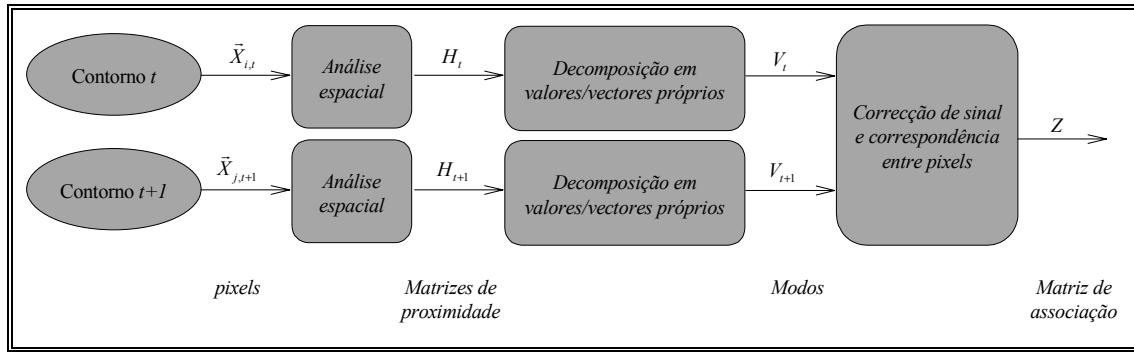


Figura 4 - Etapas do método da descrição modal da forma.

Shapiro, após a análise de resultados experimentais por si obtidos [Shapiro 1991, 1992, 1992a], tece algumas considerações ao método por si proposto:

- Como os modos apenas são baseados nas distâncias entre *pixels*, a descrição da forma não é afectada por transformações geométricas que preservam tais distâncias (como as rotações, translações e reflexões no plano imagem). O método também é robusto para escalonamentos uniformes, pois escalonar um contorno por S é equivalente a substituir σ por σ/S . Informação há cerca dos tamanhos relativos de σ_t e σ_{t+1} está contida nos valores próprios de H_t e H_{t+1} .
- Rotações não paralelas ao plano imagem até 70-90° preservam as formas dos modos razoavelmente similares. Para valores de rotações mais elevados, as formas dos contornos são bastante alteradas o que implica que as formas dos vectores modais reflectam tais distorções.
- A descrição utilizada para a forma fornece informações há cerca das simetrias de reflexão pela identificação de todos os emparelhamentos possíveis. Estas simetrias são detectadas quando a troca do sinal de um eixo modal não acarreta um detrimento nos emparelhamentos ($C_n = C_p$, ver ponto 3.2). Nestes casos, o número de escolhas arbitrárias para o sinal é igual ao número de simetrias (ortogonais) de reflexão.
- Os modos relevaram serem bastante robustos às distorções na imagem, desde que a forma global não seja substancialmente alterada. Contudo, para distorções elevadas a forma do contorno altera-se tanto que os emparelhamentos não são obtidos com êxito.
- Sobre o ponto de vista de implementação o método é bem condicionado, linear em termos do número de *pixels* e potencialmente paralizável.

Da mesma forma, Shapiro tece algumas observações em relação ao valor utilizado para σ :

- A função do parâmetro σ é a de controlar a largura da curva Gaussiana, centrada em cada *pixel*, determinando a influência dos *pixels* vizinhos. Se σ é reduzido (menor do que a distância entre *pixels* vizinhos), os elementos da matriz de proximidade não diagonais são aproximadamente iguais a zero ($H_{ij} = 0, i \neq j$) e a matriz H é praticamente diagonal. Assim que σ seja mais elevado, os elementos não diagonais aumentam até que no limite, para o qual $\sigma \rightarrow \infty$, todos os elementos de H são iguais a um.
- Quando σ é reduzido, os m valores próprios são aproximadamente iguais: $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \dots \approx \lambda_m \approx 1$. Quando σ aumenta, os valores próprios tornam-se mais distintos obtendo-se $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$.

- Quando σ é bastante elevado, o primeiro valor próprio λ_1 tende para m e, necessariamente, os restantes tendem para zero. Os modos associados a tão reduzidos e similares (degenerados) valores próprios provocam severos problemas computacionais tornando-se, assim, necessário reduzir o valor de σ quando os valores próprios das altas frequências tornam-se muito reduzidos.
- Para σ reduzidos ($H \approx I$), o modo i apresenta um vector próprio com a componente i igual a 1 e as restantes nulas (tal e qual como um impulso discreto no *pixel* i). Contudo, como todos os valores próprios são praticamente iguais, não existe maneira dos ordenar o que os torna inúteis para o emparelhamento. Para o outro extremo ($H_{ij} \approx 1$, para σ elevados), o primeiro modo tem valor singular igual a m e o vector próprio com componentes iguais a $1/\sqrt{m}$; todos os modos restantes têm valores singulares nulos e vectores arbitrários.

3.2 - O algoritmo de correcção de sinal dos modos e de emparelhamento

Neste ponto é apresentado o algoritmo para a correcção do sinal dos vectores próprios e para o emparelhamento entre os *pixels* que constituem dois contornos. Este algoritmo foi inicialmente apresentado, e proposto, por Shapiro em [Shapiro, 1991, 1992a, 1992a] e tenta, numa primeira fase, solucionar o problema da indefinição da direcção dos vectores próprios (trocando o sinal de um vector próprio E_i este continua a ser um vector próprio da mesma matriz e a manter a ortogonalidade e a sua normalização) e, numa segunda fase, estabelecer o emparelhamento entre os vários *pixels*.

Basicamente, para a solução do problema da indefinição do sinal, o algoritmo começa por admitir que os sinais dos modos do primeiro contorno estão correctos e define o sinal de cada modo do segundo contorno, um a um, de forma a maximizar o número de emparelhamentos obtidos. Para tal, é assumido que os contornos a emparelhar são de formas razoavelmente similares e explora-se o facto de os pixels deverem ser correlacionados. A fase correspondente do algoritmo, considerando-se que existem k modos para cada contorno e os contornos t e $t+1$ serem constituídos por m e n *pixels*, pode ser descrita da seguinte forma:

- Para cada modo q ($1 \leq q \leq k$), ordenados por ordem decrescente dos seus valores próprios, fazer⁵:

a) Com o sinal de $E_{q,t+1}$ positivo (isto é, não trocado), calcular uma matriz $ZP_{(mxn)}$ constituída pelas distâncias Euclidianas entre os vectores *pixel* $\tilde{F}_{i,t}$ ($1 \leq i \leq m$) e $\tilde{F}_{j,t+1}$ ($1 \leq j \leq n$), onde os vectores *pixel* são truncados a q componentes⁶:

$$ZP_{ij} = \|\tilde{F}_{i,t} - \tilde{F}_{j,t+1}\|_{(q)}^2 = \|\tilde{F}_{i,t} - \tilde{F}_{j,t+1}\|_{(q-1)}^2 + (\tilde{F}_{iq,t} - \tilde{F}_{jq,t+1})^2$$

Somar os menores elementos em cada coluna e guardar o resultado numa variável C_p .

⁵ No algoritmo original de Shapiro é atribuído ao primeiro vector próprio do contorno $t+1$ o mesmo sinal do primeiro modo do contorno t e o procedimento descrito é apenas realizado para os modos restantes.

⁶ Um vector \tilde{F}_i truncado, por exemplo, a apenas k componentes é $\tilde{F}_i = [F_{i1} \ F_{i2} \ \dots \ F_{ik} \ 0 \ \dots \ 0]$ onde F_i é o vector original.

- b) Repetir a) com o sinal de $E_{q,t+1}$ negativo, utilizando uma matriz $ZN_{(m \times n)}$ e uma variável C_n .
- c) Se $C_p < C_n$, então melhores emparelhamentos são obtidos com $E_{q,t+1}$ positivo (isto é, não trocado); contudo se $C_n < C_p$, o sinal de $E_{q,t+1}$ deve ser trocado. Se $C_p = C_n$ então existe uma simetria de reflexão na forma e o sinal pode ser escolhido de forma arbitrária.
- d) A matriz de associação Z é actualizada, fazendo-se igual ZN ou a ZP (dependendo do sinal determinado).

Na Figura 5 está representada, de forma gráfica, a fase do algoritmo para a determinação dos sinais dos vectores próprios do contorno $t+1$.

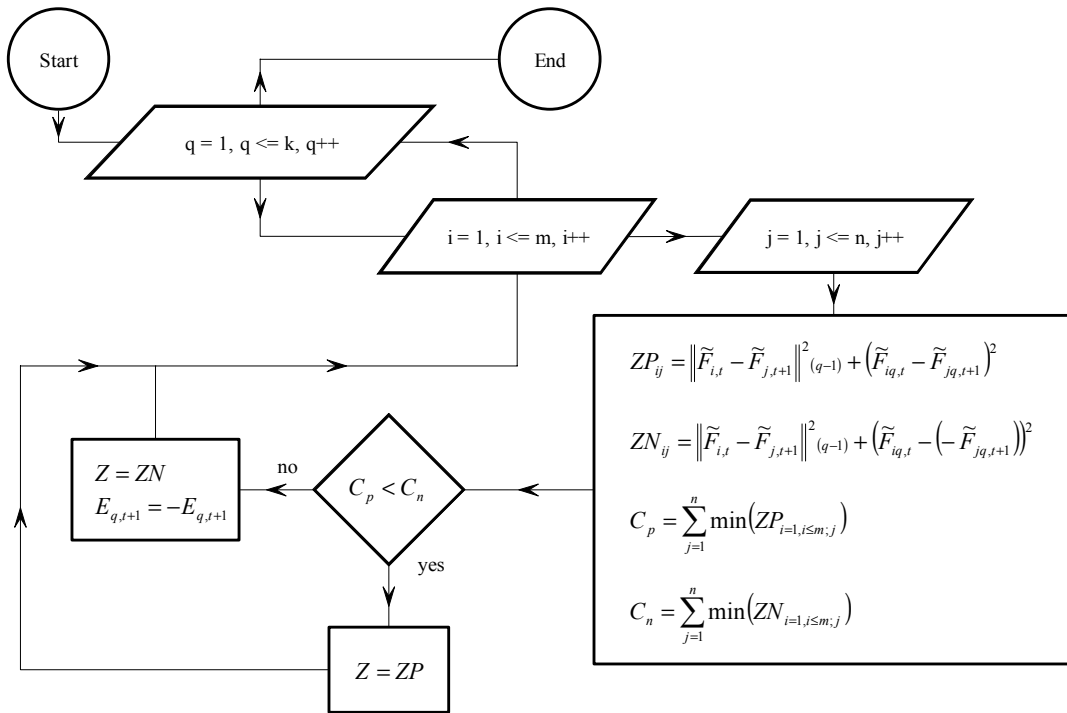


Figura 5 - Representação da fase do algoritmo correspondente à determinação dos sinais dos vectores próprios do contorno $t+1$.

Para determinar-se os emparelhamentos obtidos a fase correspondente do algoritmo pode ser descrita da seguinte forma:

- Para cada linha i ($1 \leq i \leq m$) da matriz Z , isto é para cada *pixel* i do contorno t :
 - a) Procurar o menor elemento dessa linha;
 - b) Verificar se o menor elemento encontrado em a) é menor do que um dado limiar (para ser considerado como um bom candidato ao emparelhamento) e se também é o menor valor para a sua coluna (isto é, verificar se o *pixel* j ($1 \leq j \leq n$) do contorno $t+1$ também reclama pelo *pixel* i como o melhor para emparelhar);

- c) Se a verificação realizada em b) for verdadeira, então o *pixel* i do contorno t é emparelhado com o *pixel* j do contorno $t+1$. Se tal verificação for falsa, então não é encontrado um bom emparelhamento para o *pixel* em questão.

Na *Figura 6* está representada, de forma gráfica, a fase do algoritmo para a determinação dos emparelhamentos entre os *pixels* que constituem os contornos t e $t+1$.

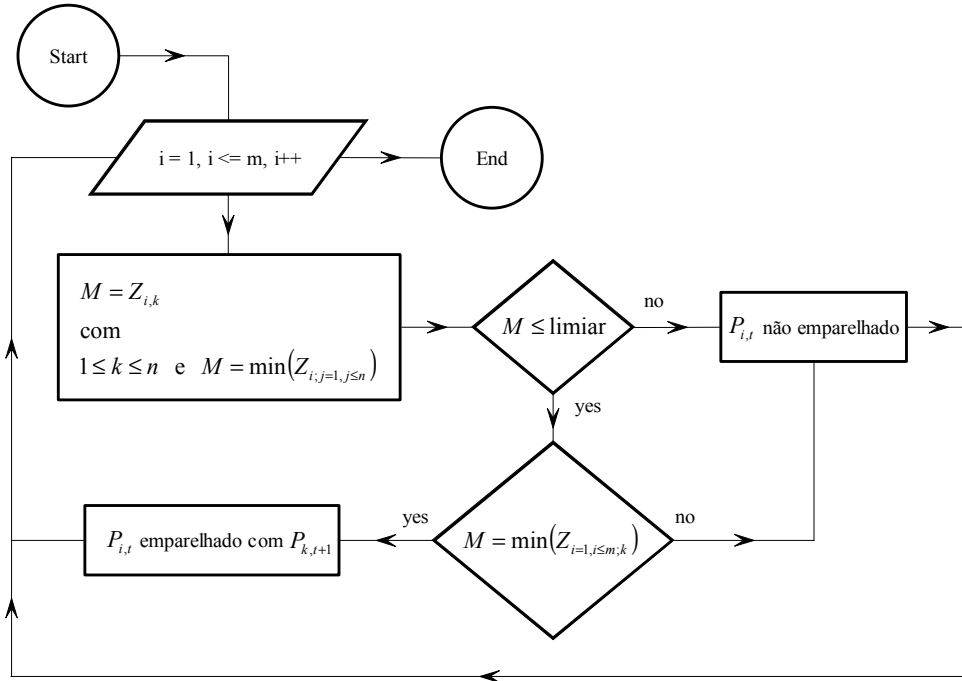


Figura 6 - Representação da fase do algoritmo para o emparelhamento dos pixels que constituem os contornos t e $t+1$.

3.3 - Um exemplo de aplicação do método

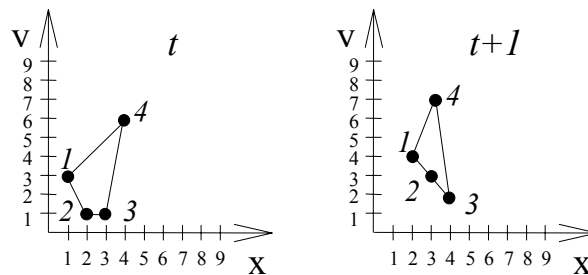


Figura 7 - Dois contornos, cada qual com quatro pixels, para serem emparelhados. O contorno $t+1$ é uma versão distorcida do contorno t , e foi movido para cima e para a direita. Os pixels foram etiquetados de forma arbitrária e a solução correcta para o emparelhamento é 1-1, 2-2, 3-3 e 4-4.

Dois contornos estão representados na *Figura 7*, [Shapiro 1991, 1992, 1992a], e o objectivo é a obtenção da correspondência correcta. Para o primeiro contorno, é seleccionado $\sigma_t = 4$ e obtemos:

$$H_t = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.855 & 0.779 & 0.570 \\ 0.855 & 1.000 & 0.969 & 0.404 \\ 0.779 & 0.969 & 1.000 & 0.444 \\ 0.570 & 0.404 & 0.444 & 1.000 \end{bmatrix}, V_t = \begin{bmatrix} 0.530 & 0.018 & 0.813 & -0.242 \\ 0.544 & -0.339 & -0.123 & 0.758 \\ 0.536 & -0.289 & -0.521 & -0.598 \\ 0.369 & 0.895 & -0.231 & 0.098 \end{bmatrix}$$

e $D_t = \text{diag}[3.061 \quad 0.715 \quad 0.210 \quad 0.014]$.

Da mesma forma, para o segundo contorno seleccionou-se $\sigma_{t+1} = 4$ e obtemos:

$$H_{t+1} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.939 & 0.779 & 0.732 \\ 0.939 & 1.000 & 0.939 & 0.607 \\ 0.779 & 0.939 & 1.000 & 0.444 \\ 0.732 & 0.607 & 0.444 & 1.000 \end{bmatrix}, V_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.534 & -0.086 & 0.710 & -0.450 \\ 0.543 & 0.247 & 0.124 & 0.793 \\ 0.495 & 0.512 & -0.570 & -0.410 \\ 0.418 & -0.818 & -0.394 & 0.030 \end{bmatrix}$$

e $D_{t+1} = \text{diag}[3.248 \quad 0.615 \quad 0.133 \quad 0.005]$.

O sinal do segundo modo em V_{t+1} está trocado e torna-se necessário uma correcção na sua direcção. Para $E_{2,t+1}$ positivo e negativo, as matrizes de associação parciais são:

$$ZP = \begin{bmatrix} 0.011 & 0.053 & 0.245 & 0.711 \\ 0.064 & 0.343 & 0.727 & 0.245 \\ 0.041 & 0.287 & 0.643 & 0.656 \\ 0.990 & 0.450 & 0.163 & 2.937 \end{bmatrix}, ZN = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.070 & 0.282 & 0.653 \\ 0.181 & 0.008 & 0.032 & 1.355 \\ 0.141 & 0.022 & 0.051 & 1.227 \\ 0.682 & 1.335 & 1.996 & 0.008 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$C_p = 0.011 + 0.053 + 0.163 + 0.245 = 0.472 \text{ e } C_n = 0.005 + 0.002 + 0.032 + 0.008 = 0.047.$$

Claramente $C_n \ll C_p$ e assim o sinal de $E_{2,t+1}$ deve ser trocado de forma à sua direcção ser a mais correcta.

Finalmente, quando todo o conjunto de modos é considerado, as similaridades entre os dois contornos são resumidas na matriz de associação Z :

$$Z = \begin{bmatrix} \underline{0.058} & 1.612 & 2.250 & 2.182 \\ 2.327 & \underline{0.070} & 1.595 & 1.957 \\ 1.678 & 2.349 & \underline{0.089} & 1.651 \\ 1.866 & 1.941 & 2.369 & \underline{0.040} \end{bmatrix}.$$

Os índices das linhas de Z são os dos *pixels* do contorno t enquanto os das colunas são os dos *pixels* do contorno $t+1$. A quarta linha, por exemplo, deriva da comparação da quarta linha em V_t (vector *pixel* $F_{4,t}$) com as quatro linhas em V_{t+1} (vector *pixel* $F_{j,t+1}$). Os elementos de menor valor estão sublinhados e correspondem ao emparelhamento correcto; assim, o segundo *pixel* do contorno t emparelha com o segundo *pixel* do contorno $t+1$ (elemento Z_{22}), e por aí adiante.

Na *Figura 8* estão representados graficamente os vectores *pixel* para os contornos t (à esquerda) e $t+1$ (à direita) após a determinação das direcções correctas dos vectores próprios. Cada gráfico representa um vector com quatro componentes com a magnitude das

componentes representada, a abcissa indexa a posição da componente no vector enquanto a ordenada representa o respectivo valor. Observando tal representação torna-se evidente que os emparelhamentos correctos são 1-1, 2-2, 3-3 e 4-4.

Na *Figura 9* estão representados graficamente os vectores próprios para os contornos t (à esquerda) e $t+1$ com as direcções devidamente determinadas (à direita). Cada gráfico representa um vector com quatro componentes com a magnitude das componentes representada, a abcissa indexa a posição da componente no vector enquanto a ordenada representa o respectivo valor. Observando tal representação, torna-se evidente que a forma dos modos são bastante similares apesar da considerável diferença entre as formas dos dois contornos, tal explica porque é alta a correlação entre os *pixels* dos dois contornos.

Deve-se notar que cada linha em V_t e em V_{t+1} referem-se a um *pixel* e assim se (arbitrariamente) o ordem de dois *pixels* é trocada os respectivos vectores *pixel* simplesmente trocam posições em V . Deste forma, os valores de afinidade mantêm-se consistentes e os emparelhamentos não são afectados.

3.3 - Resultados experimentais

Neste ponto serão apresentados alguns resultados experimentais obtidos por uma implementação do método baseado na descrição modal da forma. Assim em primeiro lugar será analisada a descrição modal de alguns contornos. Verificar-se a influência do parâmetro σ considerado, do número de modos utilizados na descrição, da utilização de *pixels* característicos do contorno (nomeadamente a utilização de *pixels* de elevada curvatura) e o tipo de influência que os modos de alta e de baixa frequência têm sobre a mesma descrição.

Em segundo lugar serão apresentados alguns resultados obtidos para o emparelhamento dos *pixels* que constituem dois contornos e será analisada e discutida a influência do parâmetro σ , da transformação rígida existente entre os dois contornos, do número de modos utilizados e da utilização de *pixels* característicos de cada contorno (nomeadamente a utilização de *pixels* de elevada curvatura).

3.3.1 - Análise modal de um contorno

Na *Figura 10* esta representado um contorno⁷ constituído por cinco *pixels* para o qual serão apresentados alguns resultados obtidos por análise modal com diferentes valores de σ . Os *pixels* que constituem este contorno estão ligados por intermédio de segmentos de recta na *Figura 11* e as suas coordenadas estão indicadas na *Figura 12*.

Para $\sigma = 3.0$ (inferior à distância mínima entre todos os *pixels*), o contorno original e o obtido considerando apenas o primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto modo de vibração estão representados na *Figura 13*, *Figura 14*, *Figura 15*, *Figura 16* e *Figura 17*, respectivamente. Na *Figura 18* e na *Figura 19*, estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma do primeiro, segundo e terceiro e o obtido considerando a soma do terceiro, quarto e quinto modo de vibração. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 20*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 21* na qual é possível verificar-se a matriz de proximidade, os valores e os vectores próprios e as amplitudes destes.

⁷ A forma deste contorno é puramente arbitrária e tem como único objectivo demonstrar o método proposto e analisar a influência dos parâmetros do mesmo. Outros contornos foram devidamente utilizados em várias experiências realizadas e os resultados obtidos estão reflectidos nas conclusões apresentadas.

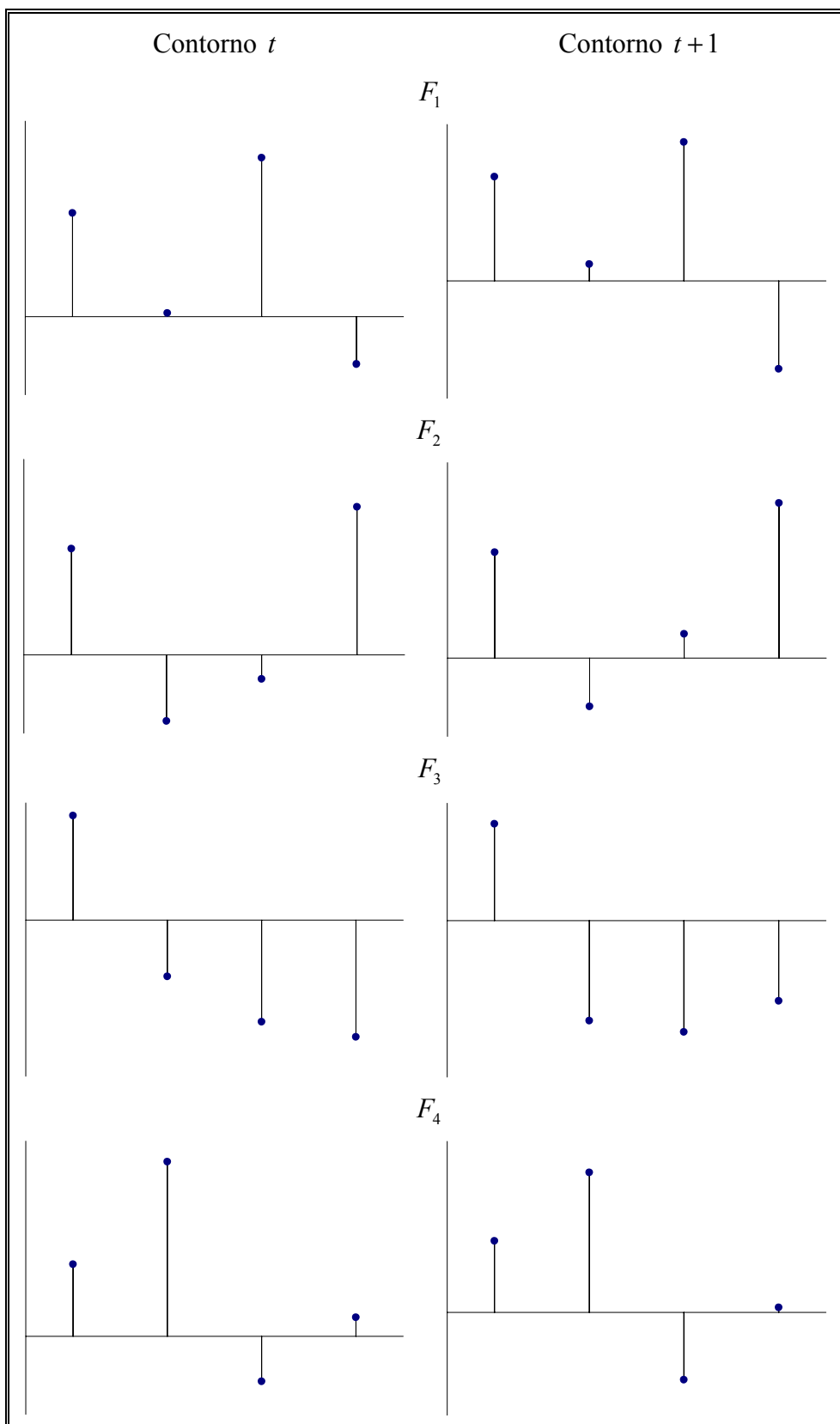


Figura 8 - Representação dos vectores pixel para o exemplo apresentado: à esquerda para o contorno t e à direita para o contorno $t+1$. Desta representação torna-se evidente que os emparelhamentos correctos deverão ser 1-1, 2-2, 3-3 e 4-4.

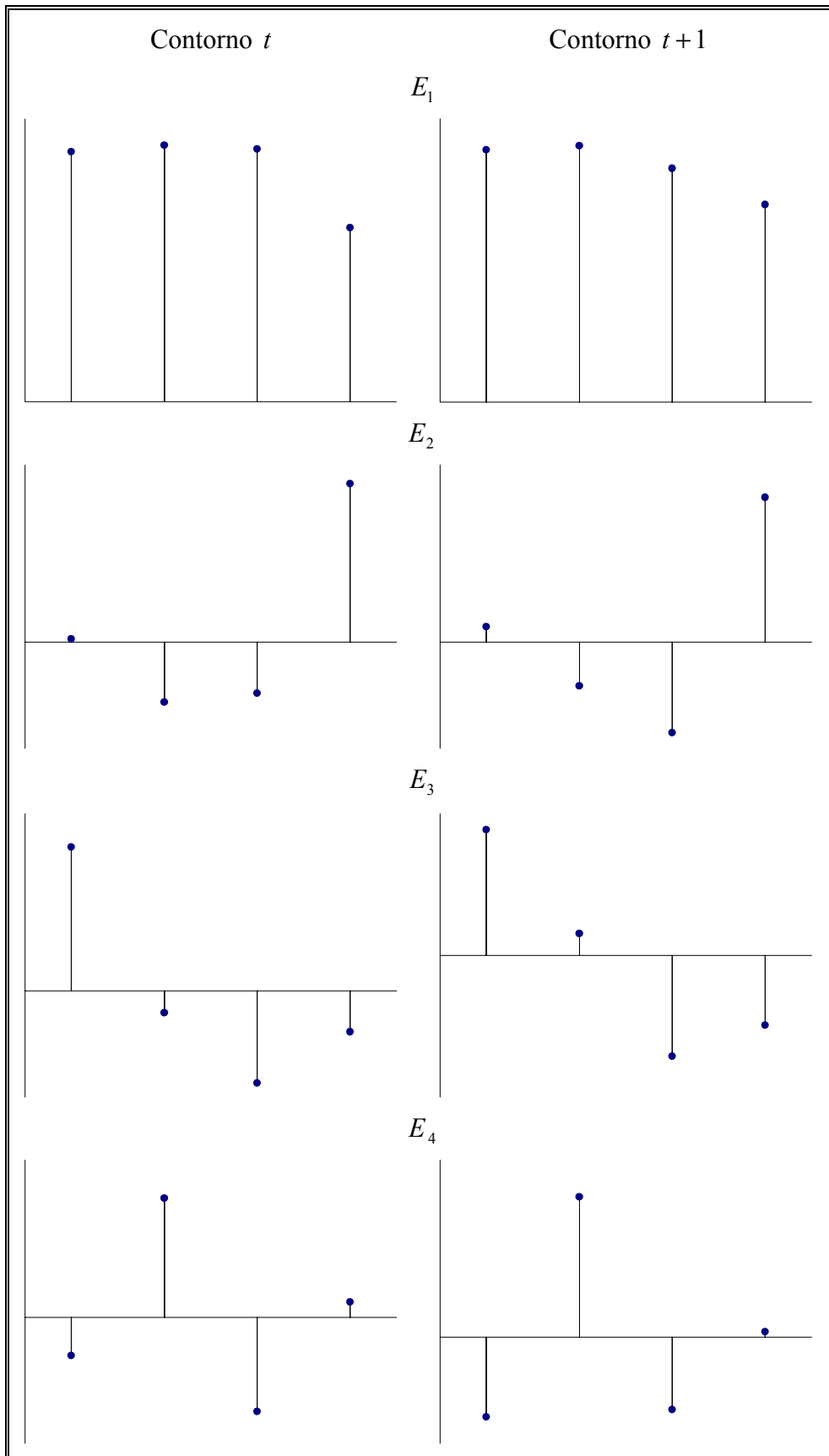


Figura 9 - Representação dos vectores próprios para o exemplo apresentado: à esquerda para o contorno t e à direita para o contorno $t+1$ com as direcções devidamente determinadas.

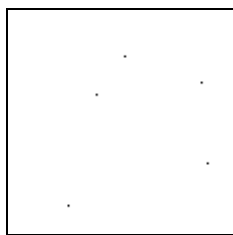


Figura 10 - Contorno a analisar.

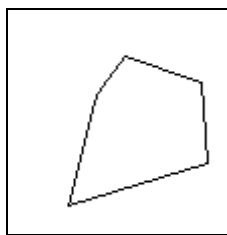
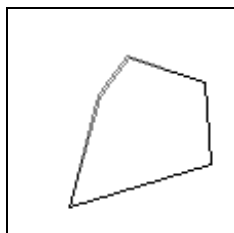
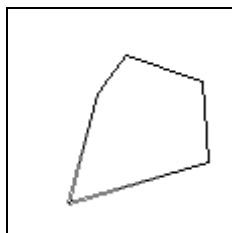
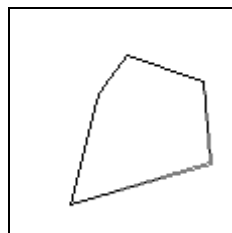
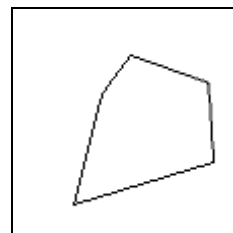
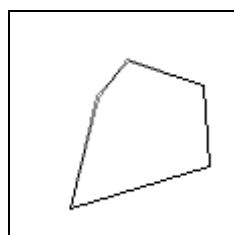
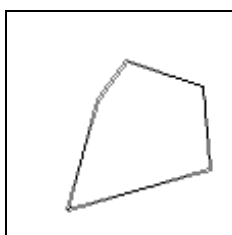
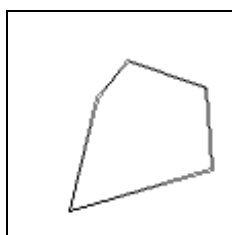
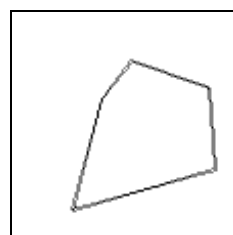


Figura 11 - Pixels do contorno a analisar ligados por segmentos de recta.

(66, 31)
(52, 50)
(38, 105)
(107, 84)
(104, 44)

Figura 12 - Coordenadas dos pixels do contorno a analisar.

Figura 13 - 1º modo de vibração para $\sigma = 3.0$.Figura 14 - 2º modo de vibração para $\sigma = 3.0$.Figura 15 - 3º modo de vibração para $\sigma = 3.0$.Figura 16 - 4º modo de vibração para $\sigma = 3.0$.Figura 17 - 5º modo de vibração para $\sigma = 3.0$.Figura 18 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 3.0$.Figura 19 - Soma do 3º, 4º e 5º modo de vibração para $\sigma = 3.0$.Figura 20 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 3.0$.

Para $\sigma = 30.0$ (superior à distância entre os *pixels* 1 e 2 e inferior às restantes), o contorno original e o obtido considerando apenas o primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto modo de vibração estão representados na Figura 22, Figura 23, Figura 24, Figura 25 e Figura 26, respectivamente. Na Figura 27 e na Figura 28, estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma do primeiro, segundo e terceiro e o obtido considerando a soma do terceiro, quarto e quinto modo de vibração. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na Figura 29. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na Figura 30 na qual é possível verificar-se a matriz de proximidade, os valores e os vectores próprios e as amplitudes destes.

Para $\sigma = 46.55$ (igual à media da distância entre *pixels* adjacentes: superior à distância entre os *pixels* 1 e 2 e entre 1 e 5 e inferior às restantes), o contorno original e o obtido considerando apenas o primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto modo de vibração estão representados na Figura 31, Figura 32, Figura 33, Figura 34 e Figura 35, respectivamente. Na Figura 36 e na Figura 37, estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma do primeiro, segundo e terceiro e o obtido considerando a soma do terceiro, quarto e quinto modo de vibração. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na Figura 38. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na Figura 39 na qual é possível verificar-se a matriz de proximidade, os valores e os vectores próprios e as amplitudes destes.

Results for Modal Analysis with the Shapiro's model in teste2

With:

Gaussian functions Sigma: 3.000000.

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```

+1.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +1.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +1.000000 +0.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +1.000000 +0.000000
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +0.000000 +1.000000

```

EigenValues: - Diagonal Matrix - (1-5) of (5):

```

+1.000000 +1.000000 +1.000000 +1.000000 +1.000000

```

EigenVectors: - Rectangular Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```

+0.707628 +0.000000 +0.001884 +0.000000 +0.706582
+0.706575 -0.000000 +0.003344 +0.000000 -0.707630
+0.000000 -1.000000 -0.000000 +0.000000 +0.000000
-0.003696 -0.000000 +0.999993 +0.000000 +0.001035
+0.000000 +0.000000 +0.000000 +1.000000 +0.000000

```

Amplitudes of the EigenVectors: - Column Vector - (1-5) of (1):

```

+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000

```

Figura 21 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 30.0$.

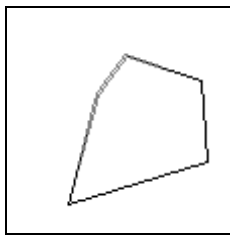


Figura 22 - 1º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

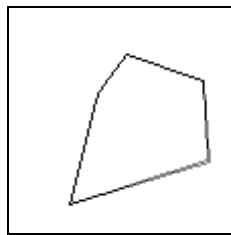


Figura 23 - 2º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

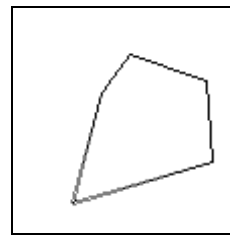


Figura 24 - 3º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

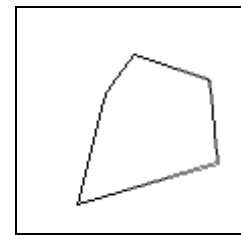


Figura 25 - 4º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

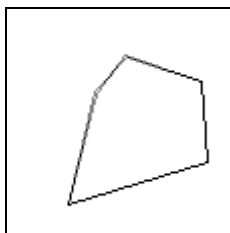


Figura 26 - 5º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

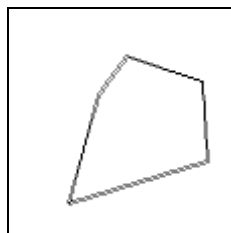


Figura 27 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

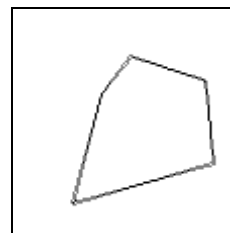


Figura 28 - Soma do 3º, 4º e 5º modo de vibração para $\sigma = 30.0$.

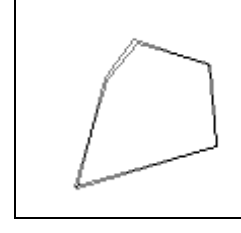


Figura 29 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 30.0$.

Para $\sigma = 58.58$ (igual à média da distância entre todos os *pixels*: superior à distância entre os *pixels* 1 e 2, entre 1 e 5, entre 2 e 3, entre 4 e 5 e inferior às restantes), o contorno original e o obtido considerando apenas o primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto modo de vibração estão representados na Figura 40, Figura 41, Figura 42, Figura 43 e Figura 44, respectivamente. Na Figura 45 e na Figura 46, estão representados o contorno original e o

obtido considerando a soma do primeiro, segundo e terceiro e o obtido considerando a soma do terceiro, quarto e quinto modo de vibração. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os modos de vibração estão representados na *Figura 47*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 48* na qual é possível verificar-se a matriz de proximidade, os valores e os vectores próprios e as amplitudes destes.

```
Results for Modal Analysis with the Shapiro's model in teste2
With:
  Gaussian functions Sigma: 30.000000.
Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

+1.000000 +0.733855 +0.030876 +0.082542 +0.408154
+0.733855 +1.000000 +0.167053 +0.098001 +0.218226
+0.030876 +0.167053 +1.000000 +0.055576 +0.011252
+0.082542 +0.098001 +0.055576 +1.000000 +0.409062
+0.408154 +0.218226 +0.011252 +0.409062 +1.000000

EigenValues: - Diagonal Matrix - (1-5) of (5):

+2.049782 +1.171236 +1.000539 +0.561980 +0.216462

EigenVectors: - Rectangular Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

+0.602933 +0.287091 +0.219666 -0.039753 +0.710082
+0.565608 +0.402341 +0.018373 +0.349533 -0.629045
+0.128004 +0.184376 -0.950729 -0.188878 +0.100303
+0.288483 -0.704746 -0.202723 +0.600362 +0.136305
+0.465780 -0.474382 +0.080174 -0.692919 -0.267293

Amplitudes of the EigenVectors: - Column Vector - (1-5) of (1):

+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000
```

Figura 30 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 30.0$.

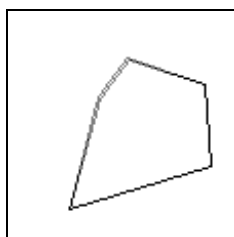


Figura 31 - 1º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

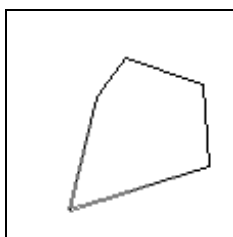


Figura 32 - 2º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

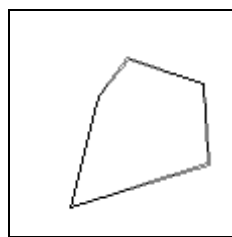


Figura 33 - 3º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

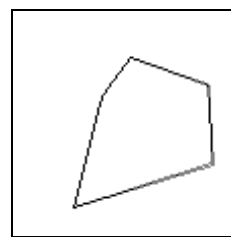


Figura 34 - 4º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

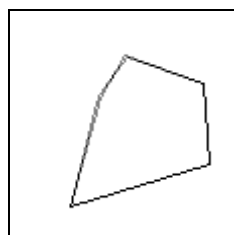


Figura 35 - 5º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

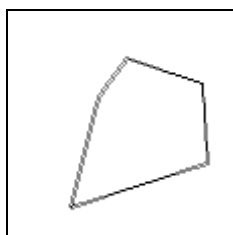


Figura 36 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

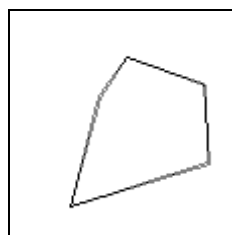


Figura 37 - Soma do 3º, 4º e 5º modo de vibração para $\sigma = 46.55$.

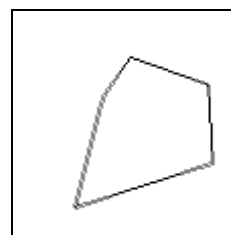


Figura 38 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 46.55$.

Results for Modal Analysis with the Shapiro's model in teste2

With:

Gaussian functions Sigma: 46.550821.

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```
+1.000000 +0.879396 +0.235886 +0.354870 +0.689232
+0.879396 +1.000000 +0.475589 +0.381095 +0.531413
+0.235886 +0.475589 +1.000000 +0.301107 +0.155105
+0.354870 +0.381095 +0.301107 +1.000000 +0.689869
+0.689232 +0.531413 +0.155105 +0.689869 +1.000000
```

EigenValues: - Diagonal Matrix - (1-5) of (5):

```
+2.954271 +0.944236 +0.822531 +0.223328 +0.055634
```

EigenVectors: - Rectangular Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```
+0.508450 -0.034331 +0.502866 +0.013513 -0.698028
+0.509480 +0.271560 +0.357164 -0.413031 +0.607062
+0.286453 +0.788633 -0.422546 +0.317764 -0.128387
+0.406731 -0.315737 -0.656089 -0.524578 -0.171013
+0.484173 -0.451048 -0.102770 +0.673102 +0.313854
```

Amplitudes of the EigenVectors: - Column Vector - (1-5) of (1):

```
+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000
```

Figura 39 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 46.55$.

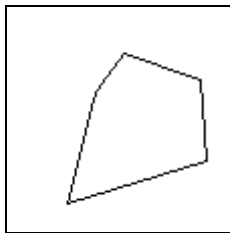


Figura 40 - 1º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

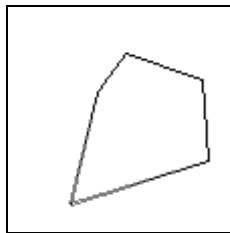


Figura 41 - 2º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

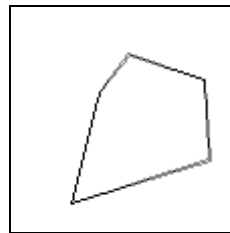


Figura 42 - 3º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

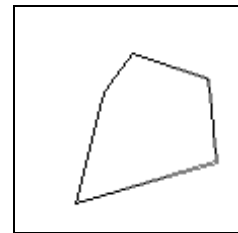


Figura 43 - 4º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

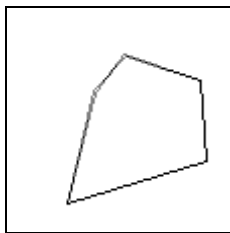


Figura 44 - 5º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

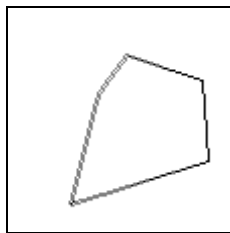


Figura 45 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

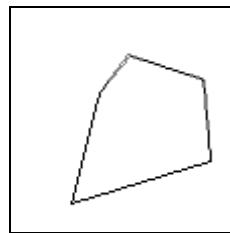


Figura 46 - Soma do 3º, 4º e 5º modo de vibração para $\sigma = 58.58$.

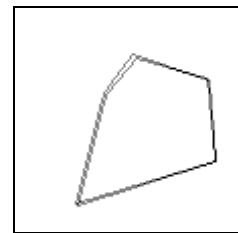


Figura 47 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 58.58$.

Para $\sigma = 150.0$ (superior à distância entre todos os *pixels*), o contorno original e o obtido considerando apenas o primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto modo de vibração estão representados na Figura 49, Figura 50, Figura 51, Figura 52 e Figura 53, respectivamente. Na Figura 54 e na Figura 55, estão representados o contorno original e o obtido considerando a soma do primeiro, segundo e terceiro e o obtido considerando a soma do terceiro, quarto e quinto modo de vibração. O contorno original e o obtido considerando a soma de todos os

modos de vibração estão representados na *Figura 56*. Os resultados obtidos pela implementação estão descritos na *Figura 57* na qual é possível verificar-se a matriz de proximidade, os valores e os vectores próprios e as amplitudes destes.

Results for Modal Analysis with the Shapiro's model in teste2

With:

Gaussian functions Sigma: 58.575952.

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```
+1.000000 +0.922038 +0.401627 +0.519805 +0.790529
+0.922038 +1.000000 +0.625392 +0.543746 +0.670800
+0.401627 +0.625392 +1.000000 +0.468576 +0.308198
+0.519805 +0.543746 +0.468576 +1.000000 +0.790990
+0.790529 +0.670800 +0.308198 +0.790990 +1.000000
```

EigenValues: - Diagonal Matrix - (1-5) of (5):

```
+3.457778 +0.780765 +0.622511 +0.114825 +0.024121
```

EigenVectors: - Rectangular Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```
+0.483115 -0.151575 +0.512344 +0.007229 +0.693597
+0.492306 +0.184687 +0.411897 +0.424575 -0.611231
+0.344936 +0.829591 -0.245296 -0.341766 +0.125790
+0.428398 -0.199944 -0.698375 +0.510284 +0.168466
+0.470881 -0.463375 -0.141238 -0.665199 -0.317988
```

Amplitudes of the EigenVectors: - Column Vector - (1-5) of (1):

```
+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000
```

Figura 48 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 58.58$.

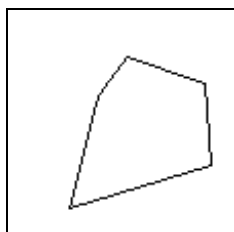


Figura 49 - 1º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

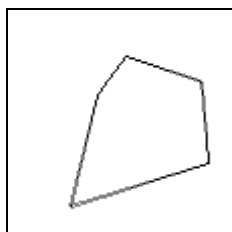


Figura 50 - 2º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

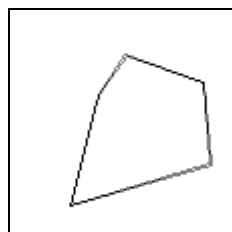


Figura 51 - 3º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

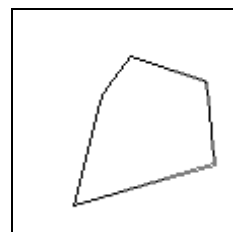


Figura 52 - 4º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

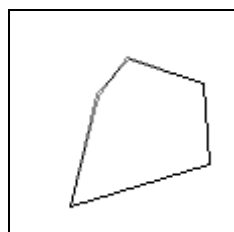


Figura 53 - 5º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

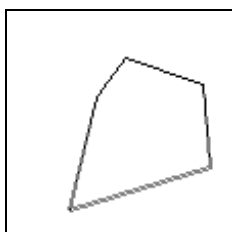


Figura 54 - Soma do 1º, 2º e 3º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

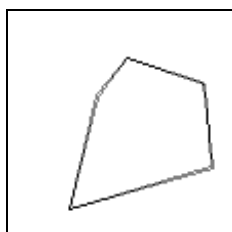


Figura 55 - Soma do 3º, 4º e 5º modo de vibração para $\sigma = 150.0$.

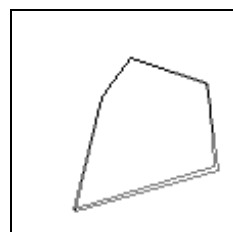


Figura 56 - Soma dos modos de vibração para $\sigma = 150.0$.

Results for Modal Analysis with the Shapiro's model in teste2

With:

Gaussian functions Sigma: 150.000000.

Matrix of the Gaussian functions: - Symmetric Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```

+1.000000 +0.987699 +0.870131 +0.905039 +0.964790
+0.987699 +1.000000 +0.930924 +0.911274 +0.940928
+0.870131 +0.930924 +1.000000 +0.890831 +0.835697
+0.905039 +0.911274 +0.890831 +1.000000 +0.964876
+0.964790 +0.940928 +0.835697 +0.964876 +1.000000

```

EigenValues: - Diagonal Matrix - (1-5) of (5):

```

+4.682393 +0.188554 +0.124499 +0.003939 +0.000615

```

EigenVectors: - Rectangular Matrix - (1-5x1-5) of (5x5):

```

+0.451857 -0.235540 -0.516511 +0.050816 +0.686280
+0.455778 +0.107207 -0.440326 +0.439805 -0.627262
+0.432025 +0.809742 +0.123595 -0.359995 +0.113139
+0.446222 -0.144453 +0.709819 +0.502566 +0.153637
+0.449814 -0.506438 +0.142164 -0.649477 -0.314893

```

Amplitudes of the EigenVectors: - Column Vector - (1-5) of (1):

```

+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000
+1.000000

```

Figura 57 - Resultados obtidos para a análise modal do contorno com $\sigma = 150.0$.

Na Figura 58, estão representados o contorno original e os obtidos considerando todos os modos de vibração para $\sigma = 3.0$, $\sigma = 30.0$, $\sigma = 46.55$, $\sigma = 58.58$ e $\sigma = 150.0$.

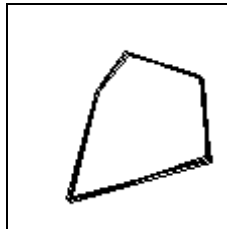


Figura 58 - Contorno original e os obtidos com a soma dos modos de vibração para $\sigma = 3.0$, $\sigma = 30.0$, $\sigma = 46.55$, $\sigma = 58.58$ e $\sigma = 150.0$.

Dos resultados experimentais obtidos podemos concluir:

- Se σ é reduzido (menor do que a distância entre *pixels* vizinhos), os elementos da matriz de proximidade não diagonais são aproximadamente iguais a zero e a matriz H é praticamente diagonal. Assim que σ seja mais elevado, os elementos não diagonais aumentam até que no limite, para o qual $\sigma \rightarrow \infty$, todos os elementos de H são iguais a um.
- Para σ reduzidos ($H \approx I$), o modo i apresenta um vector próprio com a componente i igual a 1 e as restantes praticamente nulas. Para o outro extremo ($H_{ij} \approx 1$, para σ elevados), o primeiro modo tem valor próprio praticamente igual ao número de *pixels* (m) do contorno e o vector próprio com componentes praticamente

iguais a $1/\sqrt{m}$; todos os restantes modos têm valores singulares praticamente nulos e vectores arbitrários.

- Se σ é elevado os primeiros modos têm valores próprios elevados e os restantes praticamente nulos.
- Se σ é reduzido os modos têm valores próprios reduzidos e de valor semelhante.
- Quanto mais elevado é o valor de σ menor é influência dos detalhes do contorno e maior é a zona do contorno final perturbada pelos mesmos.
- O aumento do valor de σ suaviza o contorno final.
- Os modos de baixa frequência estão associados a deformações globais e os de alta a deformações locais.
- A consideração dos modos de alta frequência tem um efeito semelhante ao de inclusão de ruído no contorno final.

3.3.2 - Emparelhamento entre dois contornos utilizando análise modal

Na *Figura 59* está representado um contorno constituído por 36 *pixels* que se pretendem emparelhar com os *pixels* do contorno representado na *Figura 60*. O contorno $t+1$ foi obtido a partir do contorno t através de uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 20° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50 e segundo o eixo y de 10 *pixels* e um escalonamento relativamente à origem de 0.75. Na *Figura 61* é possível observar-se os contornos t e $t+1$ com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

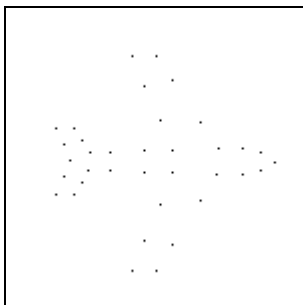


Figura 59 - Contorno t .

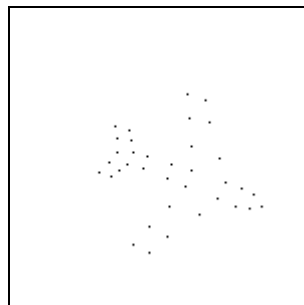
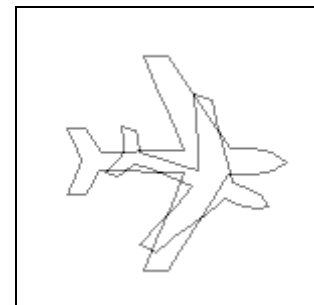


Figura 60 - Contorno $t+1$.



*Figura 61 - Contornos t e $t+1$ com os *pixels* ligados por segmentos de recta.*

Numa primeira tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 51.46$ e $\sigma_{t+1} = 38.63$ (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno) e consideraram-se todos os modos de vibração. Obtiveram-se emparelhamentos correctos para todos os *pixels* e uma transformação geométrica⁸ do contorno t para o contorno $t+1$ constituída por uma rotação de 20.07° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50.06 e segundo o eixo y de 9.89 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.75. Na *Figura 62* estão

⁸ Deve-se notar que existem erros associados à transformação geométrica determinada devido ao facto de estarmos em presença de coordenadas discretas. O método utilizado para a determinação da transformação geométrica entre os dois contornos está descrito em [Horn, 1987; Tavares, 1997].

representados⁹ os emparelhamentos obtidos; na *Figura 63* os mesmos emparelhamentos após a aplicação¹⁰ ao contorno t da rotação em torno da origem e da translação determinadas, e na *Figura 64* estão representados após a aplicação da transformação geométrica determinada. Nestas figuras é possível comprovar-se a boa qualidade obtida quer para os emparelhamentos quer na recuperação da transformação rígida existente entre os dois contornos.

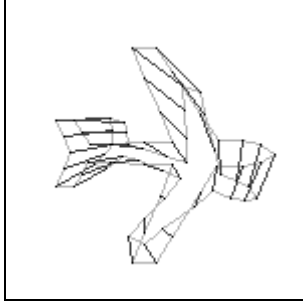


Figura 62 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 51.46$, $\sigma_{t+1} = 38.63$ e considerando todos os modos de vibração.

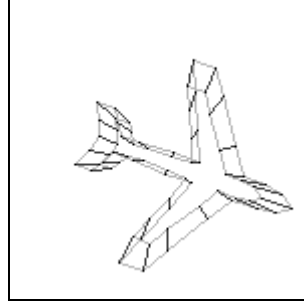


Figura 63 - ... após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

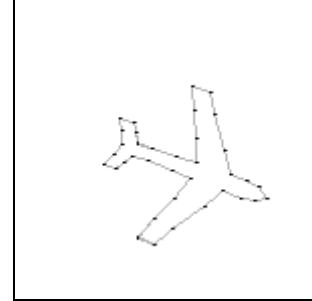


Figura 64 - ... após aplicação ao contorno t da transformação geométrica determinada.

Os mesmos resultados foram obtidos quando se consideram apenas 25% dos modos de vibração (9 modos), 10% (3 modos), 100% dos modos de vibração mas estes necessariamente diferentes¹¹ de 0.01 em frequência (8 modos) e 100% mas diferentes de 0.1 (6 modos).

Na *Figura 65* estão representados os emparelhamentos obtidos considerando-se apenas 6% dos modos de vibração (2 modos) após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas. Como se verifica, pela figura, dois modos de vibração não é suficiente o que implica que alguns emparelhamentos não sejam correctos e a transformação rígida determinada (rotação de 14.96° em torno da origem, translação segundo o eixo x de 44.2 e segundo o eixo y de 12.04 *pixels* e escalonamento de 0.75) não seja a mais correcta.

Numa segunda tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 12.93$ e $\sigma_{t+1} = 9.7$ (iguais à média da distância entre *pixels* vizinhos adjacentes para cada contorno). Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos correctos para todos os *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 20.07° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50.06 e segundo o eixo y de 9.89 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.75.

Considerando-se apenas 10% dos modos de vibração (os três primeiros modos) obteve-se apenas 26 emparelhamentos sendo alguns incorrectos. Na *Figura 66* estão representados os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas (rotação de 24.01° em torno da origem, translação segundo x de 56.42 e segundo y de 4.43 *pixels* e escalonamento de 0.75).

⁹ Nas figuras de resultados os *pixels* que constituem os contornos aparecem ligados por intermédio de segmentos de recta de forma a facilitar a análise das mesmas.

¹⁰ A transformação geométrica é aplicada ao contorno t apenas para a sua representação nas figuras.

¹¹ Retirando-se da base modal os modos de frequência semelhante (isto é, modos com valores próprios praticamente iguais) evita-se a necessidade de entrar em consideração com o respectivo sub espaço e, do mesmo modo, elimina-se os modos de frequência elevada (modos de reduzido valor próprio) associados a detalhes finos e a ruído [Bathe, 1996; Kelly, 1993; Meirovitch, 1986; Sclaroff, 1993].

Numa terceira tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 70$ e $\sigma_{t+1} = 40$. Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos correctos para todos os *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 20.07° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 50.07 e segundo o eixo y de 9.89 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.75. Na *Figura 67* é possível verificar os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas. Utilizando-se apenas 10% dos modos de vibração (os três primeiros modos) obtiveram-se os mesmos resultados.

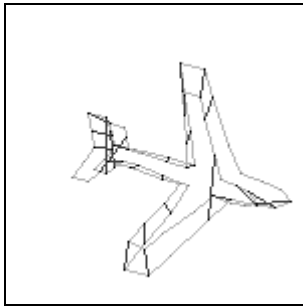


Figura 65 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 51.46$, $\sigma_{t+1} = 38.63$ e considerando os 2 primeiros modos de vibração.

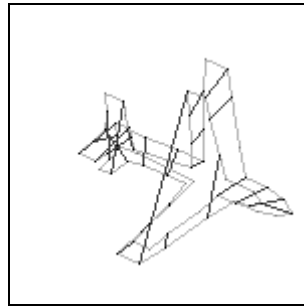


Figura 66 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 12.93$, $\sigma_{t+1} = 9.7$ e considerando os 3 primeiros modos de vibração.

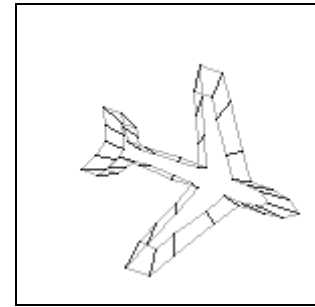


Figura 67 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 70$, $\sigma_{t+1} = 40$ e considerando todos os modos de vibração.

Numa quarta tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 6$ e $\sigma_{t+1} = 4$. Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos para 26 dos 36 *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 13.63° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 42.31 e segundo o eixo y de 8.27 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.76. Na *Figura 68* é possível verificar os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

Utilizando-se apenas 25% dos modos de vibração (os nove primeiros modos) obtiveram-se 13 emparelhamentos e uma transformação constituída por uma rotação de 18.99° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 49.09 e segundo o eixo y de 8.52 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.74. Após a aplicação ao contorno t da rotação e translação determinadas obtiveram-se os emparelhamentos representados na *Figura 69*.

Considerando-se apenas 10% dos modos de vibração (os três primeiros modos) obtiveram-se 15 emparelhamentos de má qualidade, *Figura 70*.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_t e σ_{t+1} apropriados (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), três modos são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos. Notou-se também que a não consideração dos modos de elevada frequência fez com que a imunidade aos detalhes finos fosse superior diminuindo-se assim pequenas perturbações existentes.

Numa segunda experiência utilizaram-se os contornos constituídos por 11 *pixels* representados na *Figura 71* e na *Figura 72*. O contorno $t+1$ foi obtido a partir do contorno t através de uma transformação geométrica constituída por uma rotação de -15° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10 e segundo o eixo y de 10 *pixels* e um

escalonamento relativamente à origem de 1.25. Na *Figura 73* é possível observar-se os contornos t e $t+1$ com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

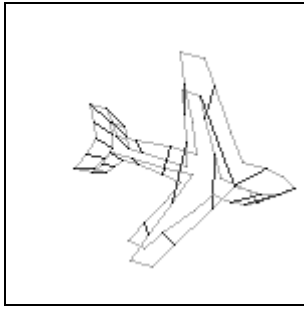


Figura 68 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 6$, $\sigma_{t+1} = 4$ e considerando todos os modos de vibração.

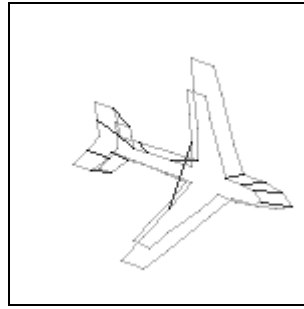


Figura 69 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 6$, $\sigma_{t+1} = 4$ e considerando os 9 (25%) primeiros modos de vibração.

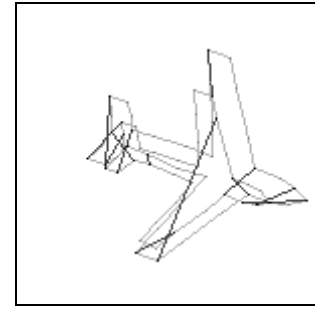


Figura 70 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 6$, $\sigma_{t+1} = 4$ e considerando os 3 (10%) primeiros modos de vibração.

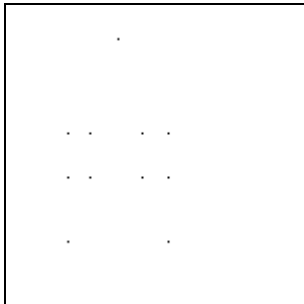


Figura 71 - Contorno t .

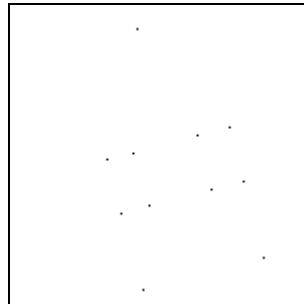


Figura 72 - Contorno $t+1$.



*Figura 73 - Contornos t e $t+1$ com os *pixels* ligados por segmentos de recta.*

Numa primeira tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 45.29$ e $\sigma_{t+1} = 56.76$ (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno) e consideraram-se todos os modos de vibração. Obtiveram-se emparelhamentos correctos para 10 dos 11 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno t para o contorno $t+1$ constituída por uma rotação de 146.64° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 190.31 e segundo o eixo y de 121.11 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.26. Na *Figura 74* estão representados os emparelhamentos obtidos e, na mesma, é possível verificar-se que os emparelhamentos estão errados.

Considerando-se apenas 30% dos modos (os três primeiros modos) obteve-se emparelhamento para 10 dos 11 *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 136.38° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 201.8 e segundo o eixo y de 111.25 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25. Os emparelhamentos obtidos estão representados na *Figura 75* e é possível verificar-se que estes estão errados.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1 (3 modos) obteve-se 11 emparelhamentos, *Figura 76*, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.81 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 77*. Aplicando-se a transformação rígida

determinada ao contorno t obtemos a representação para os emparelhamentos dada pela *Figura 78*. Nestas figuras é possível comprovar-se a boa qualidade obtida quer para os emparelhamentos quer na recuperação da transformação rígida existente entre os dois contornos.

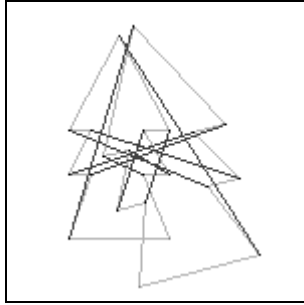


Figura 74 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 45.29$, $\sigma_{t+1} = 56.76$ e considerando todos os modos de vibração.

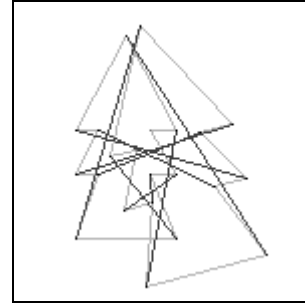


Figura 75 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 45.29$, $\sigma_{t+1} = 56.76$ e considerando os 3 primeiros modos de vibração (25%).

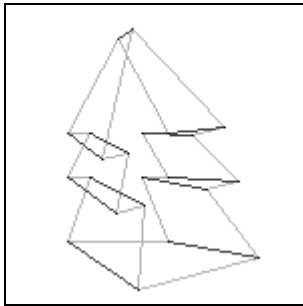


Figura 76 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 45.29$, $\sigma_{t+1} = 56.76$ e considerando os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1.

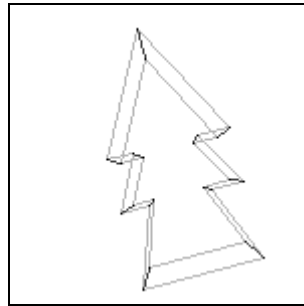


Figura 77 - ... após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

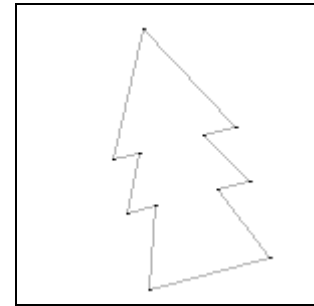


Figura 78 - ... após aplicação ao contorno t da transformação rígida determinada.

Numa segunda tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 29.36$ e $\sigma_{t+1} = 38.81$ (iguais à média da distância entre *pixels* vizinhos adjacentes para cada contorno). Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos correctos para todos os *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.8 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25 . Na *Figura 79* é possível verificar-se os emparelhamentos obtidos. Após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas obtemos a representação para os emparelhamentos da *Figura 80*, considerando também a aplicação do escalonamento determinado obtemos a representação da *Figura 81*.

Considerando-se apenas 30% dos modos de vibração (os três primeiros modos) obteve-se os mesmos resultados para o emparelhamento e para a transformação rígida.

Resultados idênticos, quer para o emparelhamento quer para a transformação geométrica, foram obtidos considerando os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1 (6 modos).

Numa terceira tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 14$ e $\sigma_{t+1} = 19$. Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos correctos para todos

os *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.8 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25 .

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1 (6 modos) obtiveram-se resultados idênticos.

Entrando em consideração com apenas 30% dos modos de vibração (os três primeiros modos) obtemos 10 emparelhamentos correctos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 345.74° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -5.88 e segundo o eixo y de 9.75 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.23 . Na *Figura 82* é possível verificar-se os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

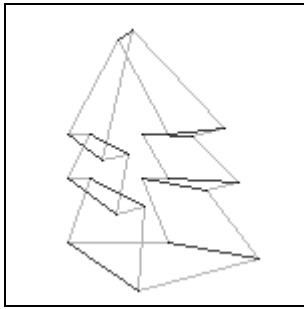


Figura 79 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 29.36$, $\sigma_{t+1} = 38.81$ e considerando todos os modos de vibração.

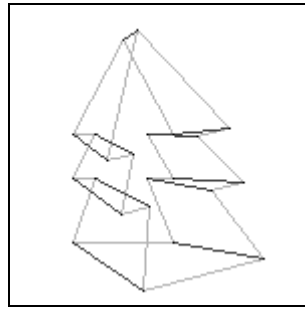


Figura 80 - ... após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

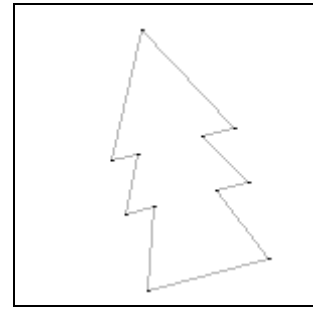


Figura 81- ... após aplicação ao contorno t da transformação geométrica determinada.

Numa quarta tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 80$ e $\sigma_{t+1} = 100$. Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos para todos os 11 *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 344.97° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.14 e segundo o eixo y de 9.8 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.25 . Na *Figura 83* é possível verificar os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

Considerando-se apenas 30% dos modos (os três primeiros) obtemos resultados idênticos assim como quando se consideram apenas os modos que diferem entre si em frequência de 0.1 (3 modos).

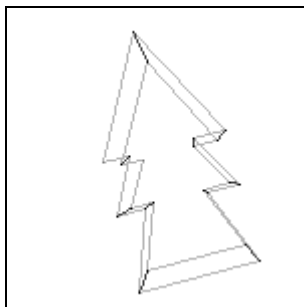


Figura 82 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 14$, $\sigma_{t+1} = 19$ e considerando os 3 primeiros modos de vibração (30%) após a aplicação da rotação e da translação determinadas.

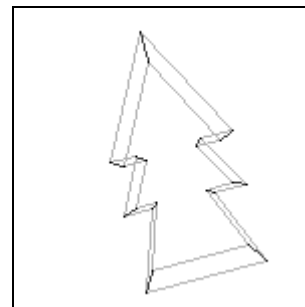


Figura 83 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 80$, $\sigma_{t+1} = 100$ e considerando todos os modos de vibração após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_t e σ_{t+1} apropriados (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), três modos são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos desde que estes sejam diferentes em frequência (o valor de 0.1, para diferença mínima, pareceu ser uma boa solução).

Numa terceira experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 5 em 5 *pixels*, de um objecto real (coração) representados¹² na Figura 84 (84 *pixels*) e na Figura 85 (79 *pixels*). Na Figura 86 é possível observar-se os contornos t e $t+1$ com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

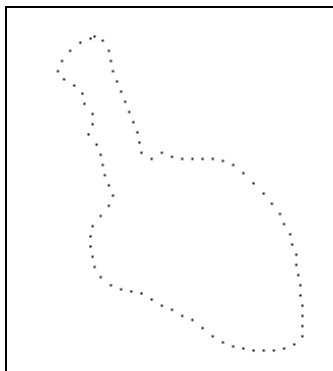


Figura 84 - Contorno t .

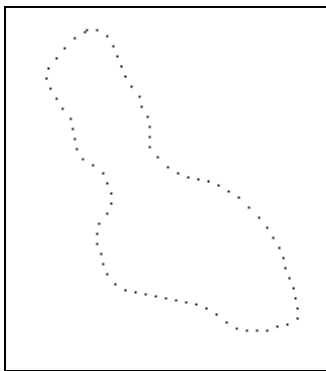


Figura 85 - Contorno $t+1$.

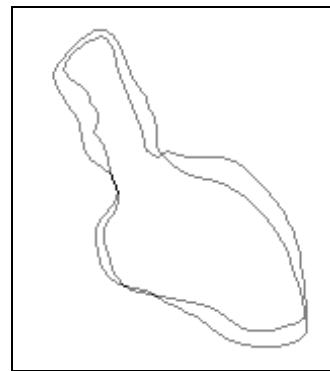


Figura 86 - Contornos t e $t+1$ com os *pixels* ligados por segmentos de recta.

Numa primeira tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 76.66$ e $\sigma_{t+1} = 74.94$ (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno) e consideraram-se todos os modos de vibração. Obtiveram-se emparelhamentos para 8 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno t para o contorno $t+1$ constituída por uma rotação de 0.40° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -2.35 e segundo o eixo y de -2.08 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.00. Na Figura 87 estão representados os emparelhamentos obtidos.

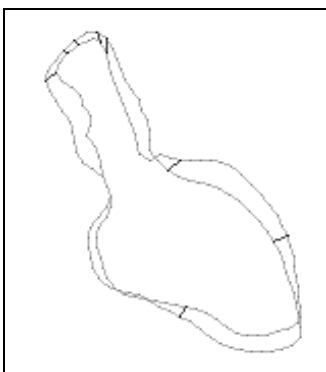


Figura 87 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 76.66$, $\sigma_{t+1} = 74.94$ e considerando todos os modos de vibração.

¹² As figuras apresentadas para estes contornos foram cortadas 0.5 cm superiormente, 1.5 cm inferiormente, 1.5 cm do lado esquerdo e 1.0 cm do lado direito. Estes cortes foram feitos para diminuir o espaço ocupado sem diminuir a zona de interesse em cada imagem.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1 (7 modos) obteve-se 49 emparelhamentos, *Figura 88*, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 0.40° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -0.25 e segundo o eixo y de -4.05 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.98. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 89*. Aplicando-se a transformação rígida determinada ao contorno t obtemos a representação para os emparelhamentos dada pela *Figura 90*. Nestas figuras é possível comprovar-se a boa qualidade obtida quer para os emparelhamentos quer na recuperação da transformação rígida existente entre os dois contornos.

Entrando em consideração com apenas 10% dos modos (7 modos) obtiveram-se resultados idênticos.

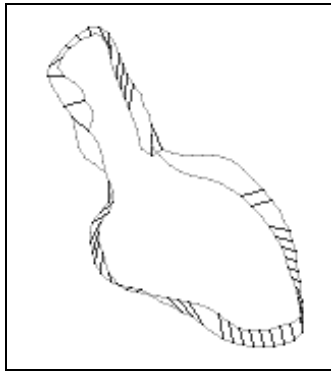


Figura 88 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 76.66$, $\sigma_{t+1} = 74.94$ e considerando todos os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1.

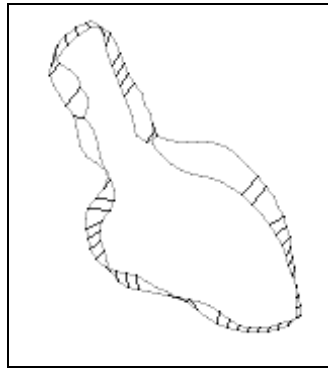


Figura 89 - ... após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

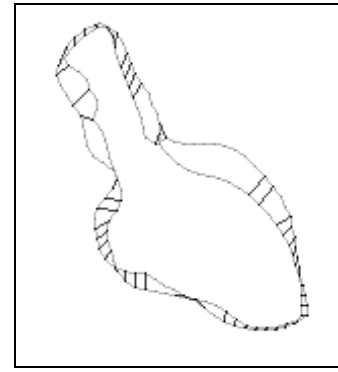


Figura 90 - ... após aplicação ao contorno t da transformação geométrica determinada.

Numa segunda tentativa de emparelhamento utilizou-se $\sigma_t = 5.45$ e $\sigma_{t+1} = 5.53$ (iguais à média da distância entre *pixels* vizinhos adjacentes para cada contorno). Considerando-se todos os modos de vibração obteve-se emparelhamentos para 7 *pixels*, *Figura 91*, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 4.82° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 4.28 e segundo o eixo y de -13.75 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.03.

Considerando-se apenas 10% dos modos (os sete primeiros modos) obteve-se emparelhamentos para 15 *pixels* e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 28.43° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 59.28 e segundo o eixo y de -57.63 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.02. Estes emparelhamentos estão representados na *Figura 92* e, como se pode verificar na referida figura, são de fraca qualidade.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_t e σ_{t+1} apropriados (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), poucos modos (7 modos) são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos desde que estes sejam diferentes em frequência (o valor de 0.1, para diferença mínima, pareceu ser uma boa solução). Da mesma, verificou-se que valores reduzidos para σ_t e σ_{t+1} não foi possível obter-se bons emparelhamentos.

Numa quarta experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 3 em 3 *pixels*, de um objecto real (coração) representados¹³ na *Figura 93* (84 *pixels*) e na *Figura 94* (70 *pixels*). Na *Figura 95* é possível observar-se os contornos t e $t+1$ com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

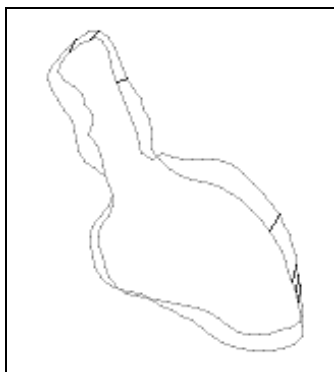


Figura 91 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 5.45$, $\sigma_{t+1} = 5.53$ e considerando todos os modos de vibração.

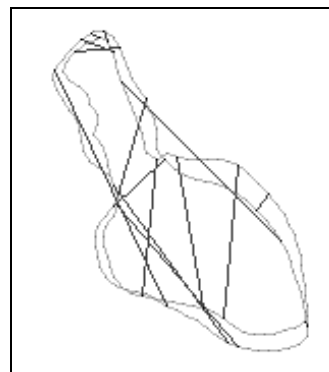


Figura 92 - Emparelhamentos obtidos com $\sigma_t = 51.46$, $\sigma_{t+1} = 38.63$ e considerando os 7 primeiros modos de vibração.

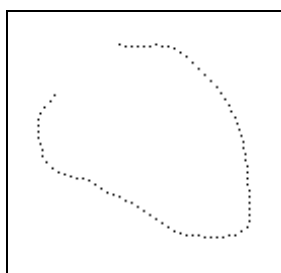


Figura 93 - Contorno t .

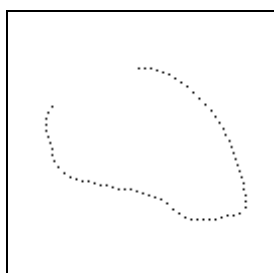


Figura 94 - Contorno $t+1$.



*Figura 95 - Contornos t e $t+1$ com os *pixels* ligados por segmentos de recta.*

Utilizando-se $\sigma_t = 60.64$ e $\sigma_{t+1} = 51.76$ (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno) e consideram-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 14 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno t para o contorno $t+1$ constituída por uma rotação de 15.9° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 66.26 e segundo o eixo y de -3.31 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.84. Na *Figura 96* estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1 (5 modos) obteve-se 52 emparelhamentos, *Figura 97*, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 3.95° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 30.56 e segundo o eixo y de 13.04 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 0.86. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 98*. Aplicando-se a transformação rígida determinada ao contorno t obtemos a representação para os emparelhamentos dada pela *Figura 99*. Nestas figuras é possível comprovar-se a boa qualidade obtida quer para os

¹³ As figuras apresentadas para estes contornos foram cortadas 2.0 cm superiormente, 1.3 cm inferiormente, 2.2 cm do lado esquerdo e 1.0 cm do lado direito.

emparelhamentos quer na recuperação da transformação rígida existente entre os dois contornos.

Entrando em consideração com apenas 8% dos modos (5 modos) obtiveram-se resultados idênticos.

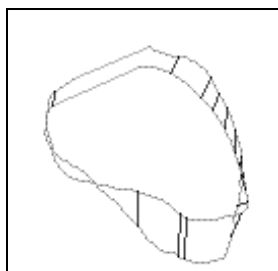


Figura 96 - Emparelhamentos obtidos considerando-se todos os modos de vibração.

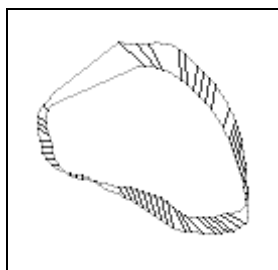


Figura 97 - Emparelhamentos obtidos considerando os 5 primeiros modos de vibração.

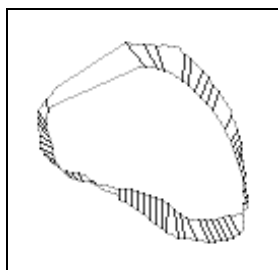


Figura 98 - ... após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

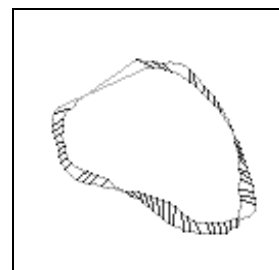


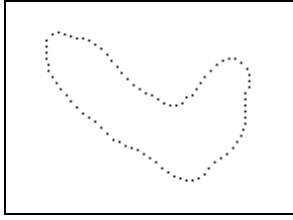
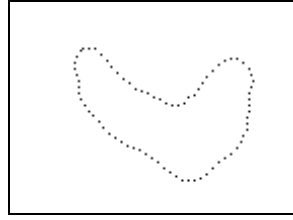
Figura 99 - ... após aplicação ao contorno t da transformação geométrica determinada.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_t e σ_{t+1} apropriados (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), poucos modos (5 modos) são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos desde que estes sejam diferentes em frequência (o valor de 0.1, para diferença mínima, pareceu ser uma boa solução).

Numa quinta experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 3 em 3 *pixels*, de um objecto real representados¹⁴ na Figura 100 (78 *pixels*) e na Figura 101 (85 *pixels*). Na Figura 102 é possível observar-se os contornos t e $t+1$ com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se $\sigma_t = 45.07$ e $\sigma_{t+1} = 49.62$ (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno) e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos satisfatórios para 21 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno t para o contorno $t+1$ constituída por uma rotação de 3.88° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 4.46 e segundo o eixo y de -21.87 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.04. Na Figura 103 estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

¹⁴ As figuras apresentadas para estes contornos forem cortadas 3.5 cm superiormente, 0.5 cm inferiormente, 2.5 cm do lado esquerdo e 0.5 cm do lado direito.

Figura 100 - Contorno t .Figura 101 - Contorno $t+1$.Figura 102 - Contornos t e $t+1$ com os pixels ligados por segmentos de recta.Figura 103 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração e após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1 (6 modos) obteve-se 66 emparelhamentos, *Figura 104*, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 4.01° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de -10.21 e segundo o eixo y de -38.05 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.12. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 105*. Aplicando-se a transformação rígida determinada ao contorno t obtemos a representação para os emparelhamentos dada pela *Figura 106*. Nestas figuras é possível comprovar-se a boa qualidade obtida quer para os emparelhamentos quer na recuperação da transformação rígida existente entre os dois contornos.

Entrando em consideração com apenas 8% dos modos (6 modos) obtiveram-se resultados idênticos.

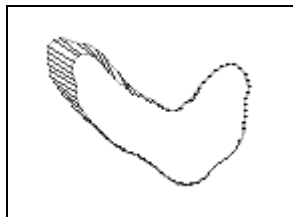
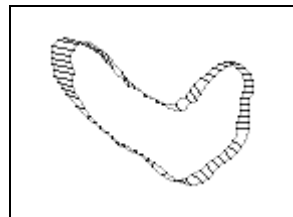
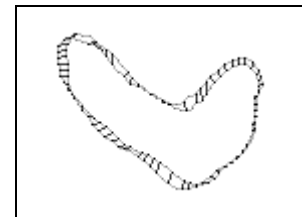


Figura 104 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1.

Figura 105 - ... após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.Figura 106 - ... após aplicação ao contorno t da transformação geométrica determinada.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_t e σ_{t+1} apropriados (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), poucos modos (6 modos) são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos desde que estes sejam diferentes em frequência (o valor de 0.1, para diferença mínima pareceu, ser uma boa solução).

Numa sexta experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 3 em 3 *pixels*, de um objecto real representados¹⁵ na *Figura 107* (64 *pixels*) e na *Figura 108* (68 *pixels*). Na *Figura 109* é possível observar-se os contornos t e $t+1$ com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

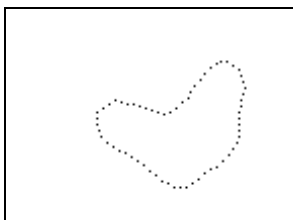


Figura 107 - Contorno t .

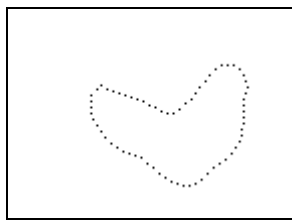
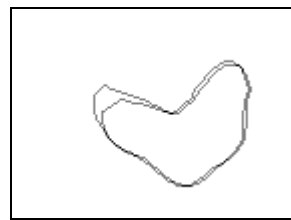


Figura 108 - Contorno $t+1$.



*Figura 109 - Contornos t e $t+1$ com os *pixels* ligados por segmentos de recta.*

Utilizando-se $\sigma_t = 38.75$ e $\sigma_{t+1} = 40.51$ (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno) e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos satisfatórios para 17 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno t para o contorno $t+1$ constituída por uma rotação de 2.15° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 4.35 e segundo o eixo y de -9.21 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.01. Na *Figura 110* estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1 (7 modos) obteve-se 54 emparelhamentos e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 8.05° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 17.65 e segundo o eixo y de -35.53 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.05. Os emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 111*.

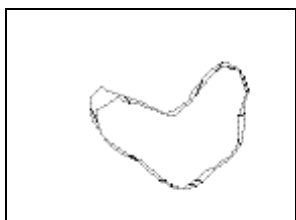


Figura 110 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

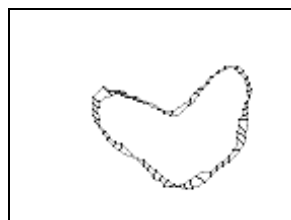


Figura 111 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1 após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

Utilizando-se apenas 10% dos modos de vibração (os seis primeiros modos) obtiveram-se 59 emparelhamentos, *Figura 112*, e uma transformação constituída por uma rotação de 7.91° em torno da origem, uma translação segundo o eixo x de 16.63 e segundo o eixo y de -35.67 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.06. Após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas obtiveram-se os emparelhamentos representados na

¹⁵ As figuras apresentadas para estes contornos forem cortadas 3.5 cm superiormente, 0.5 cm inferiormente, 2.5 cm do lado esquerdo e 0.5 cm do lado direito.

Figura 113. Na *Figura 114* estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da transformação rígida determinada.

Desta experiência pode-se concluir que apenas, para σ_t e σ_{t+1} apropriados (iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno parece ser uma boa solução), poucos modos (6 modos) são suficientes para recuperar-se a transformação rígida existente entre os dois contornos e obter-se bons emparelhamentos desde que estes sejam diferentes em frequência (o valor de 0.1, para diferença mínima, pareceu ser uma boa solução).

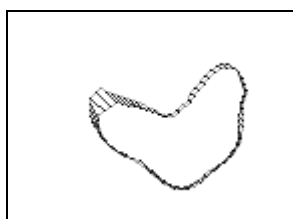


Figura 112 - Emparelhamentos obtidos considerando-se os 6 primeiros modos de vibração (10%).

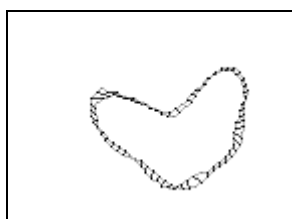


Figura 113 - ... após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

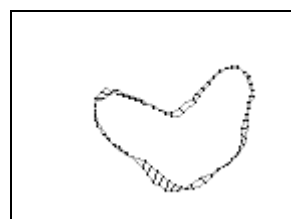


Figura 114 - ... após aplicação ao contorno t da transformação rígida determinada.

Numa sétima experiência utilizaram-se os contornos, amostrados de 4 em 4 *pixels*, de um objecto real representados¹⁶ na *Figura 115* (46 *pixels*) e na *Figura 116* (49 *pixels*). Na *Figura 117* é possível observar-se os contornos t e $t+1$ com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

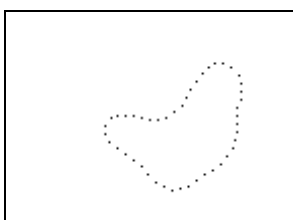


Figura 115 - Contorno t .

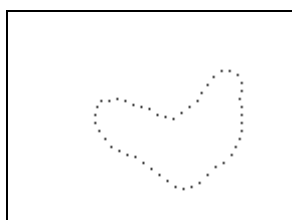
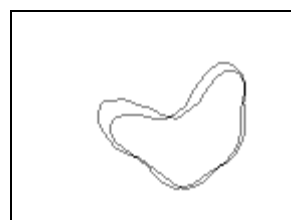


Figura 116 - Contorno $t+1$.



*Figura 117 - Contornos t e $t+1$ com os *pixels* ligados por segmentos de recta.*

Utilizando-se σ_t e σ_{t+1} iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 16 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno t para o contorno $t+1$ constituída por uma rotação de 179.99° em torno do eixo $(0.39, 0.92, 0.0)$ que passa pela origem, uma translação segundo o eixo x de 171.15 e segundo o eixo y de -88.76 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.06. Na *Figura 118* estão representados os emparelhamentos obtidos e pode-se verificar que os mesmos estão errados.

Para esta experiência não foi possível obter-se emparelhamentos satisfatórios nem recuperar uma transformação rígida aceitável.

¹⁶ As figuras apresentadas para estes contornos forem cortadas 3.5 cm superiormente, 0.5 cm inferiormente, 2.5 cm do lado esquerdo e 0.5 cm do lado direito.

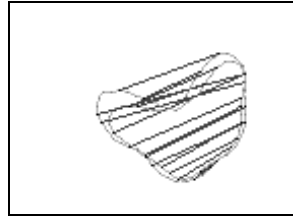


Figura 118 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração

Numa oitava experiência utilizaram-se os contornos amostrados de 4 em 4 *pixels* do mesmo objecto real da experiência anterior mas, desta vez, consideram-se também os *pixels* de elevado valor de curvatura¹⁷, Figura 119 (48 *pixels*) e Figura 120 (56 *pixels*). Na Figura 121 é possível observar-se os contornos t e $t+1$ com os *pixels* que os constituem ligados por segmentos de recta.

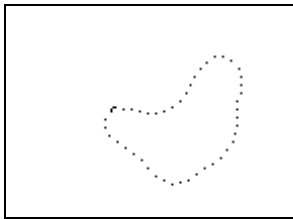


Figura 119 - Contorno t .

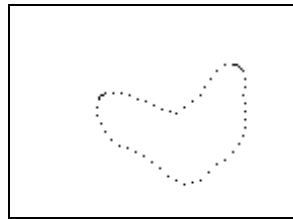


Figura 120 - Contorno $t+1$.

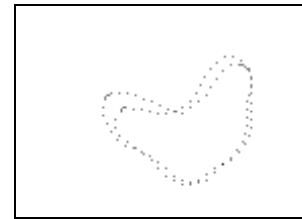


Figura 121 - Contornos t e $t+1$ com os *pixels* ligados por segmentos de recta.

Utilizando-se σ_t e σ_{t+1} iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno e considerando-se todos os modos de vibração obtiveram-se emparelhamentos para 16 *pixels* e uma transformação geométrica do contorno t para o contorno $t+1$ constituída por uma rotação de 6.52° , uma translação segundo o eixo x de 13.11 e segundo o eixo y de -31.83 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.06. Na Figura 122 estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

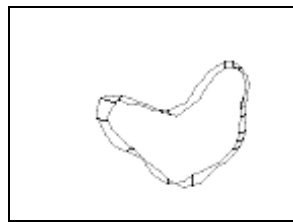


Figura 122 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

Considerando-se apenas os modos de vibração que diferem entre si em frequência de 0.1 (6 modos) obteve-se 38 emparelhamentos, Figura 123, e uma transformação geométrica constituída por uma rotação de 8.08° , uma translação segundo o eixo x de 16.63 e segundo o eixo y de -37.51 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.06. Os

¹⁷ Para cálculo da curvatura consideram-se os 5 *pixels* vizinhos e consideram-se como *pixels* de elevada curvatura os que apresentavam um ângulo não inferior a 45° .

emparelhamentos obtidos após aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas estão representados na *Figura 124*. Aplicando-se a transformação rígida determinada ao contorno t obtemos a representação dos emparelhamentos estabelecidos da *Figura 125*.

Utilizando-se apenas 15% dos modos de vibração (os sete primeiros modos) obtiveram-se 42 emparelhamentos, *Figura 126*, e uma transformação constituída por uma rotação de 9.41° , uma translação segundo o eixo x de 20.62 e segundo o eixo y de -42.28 *pixels* e um escalonamento em relação à origem de 1.07. Após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas obtiveram-se os emparelhamentos representados na *Figura 127*. Na *Figura 128* estão representados os emparelhamentos obtidos após a aplicação ao contorno t da transformação rígida determinada.

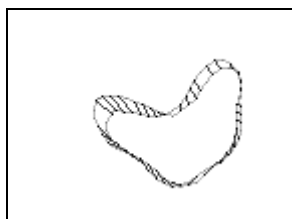


Figura 123 - Emparelhamentos obtidos considerando todos os modos de vibração que diferem entre si em frequência 0.1.

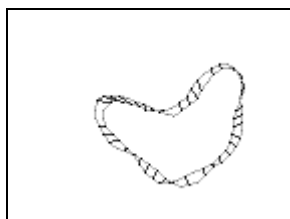


Figura 124 - ... após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

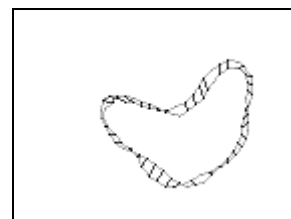


Figura 125 - ... após a aplicação ao contorno t da transformação geométrica determinada.

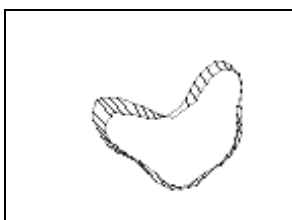


Figura 126 - Emparelhamentos obtidos considerando os 7 primeiros modos de vibração (15%).

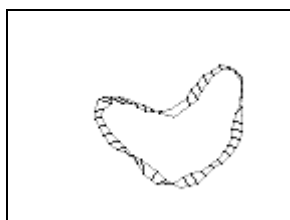


Figura 127 - ... após a aplicação ao contorno t da rotação e da translação determinadas.

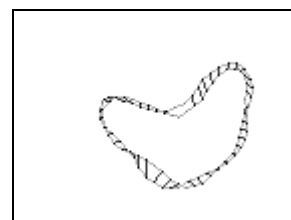


Figura 128 - ... após a aplicação ao contorno t da transformação geométrica determinada.

Comparando as duas últimas experiências pode-se concluir que a utilização dos *pixels* de elevada curvatura tornou possível obter-se bons emparelhamentos. Tal facto, indicia que a utilização destes *pixels* deve ser tida em conta em contornos que se pretendam emparelhar e cujos *pixels* de elevada curvatura devam ser associados (isto é, são *pixels* correspondentes). Em contornos existentes em imagens médicas, em geral, os *pixels* de elevada curvatura devem ser associados.

Algumas experiências de emparelhamento foram realizadas nas quais eram considerados apenas pontos do interior do objecto ou em conjunto com os pontos do contorno. Destas experiências pode-se concluir que a inclusão dos pontos interiores do objecto não melhora os emparelhamentos obtidos.

A título de exemplo esta representado na *Figura 129* o conteúdo do ficheiro de resultados do emparelhamento de dois contornos obtido pela implementação do método proposto nesta comunicação.

Results for Modal Matching with the Shapiro's model with:

Gaussian functions Sigma for contour in image t: 123.503763.

Gaussian functions Sigma for contour in image t+1: 55.338379.

Matrix of the Gaussian functions for contour in image t: - Symmetric Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

```
+1.000000 +0.643252 +0.631282
+0.643252 +1.000000 +0.545204
+0.631282 +0.545204 +1.000000
```

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-3) of (3):

```
+2.214174 +0.455153 +0.330673
```

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

```
+0.596025 +0.042197 -0.801856
+0.569806 +0.681377 +0.459398
+0.565752 -0.730716 +0.382073
```

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-3) of (1):

```
+1.000000
+1.000000
+1.000000
```

Matrix of the Gaussian functions for contour in image t+1: - Symmetric Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

```
+1.000000 +0.628440 +0.625574
+0.628440 +1.000000 +0.565624
+0.625574 +0.565624 +1.000000
```

Vibration's frequencies: - Diagonal Matrix - (1-3) of (3):

```
+2.213542 +0.434408 +0.352050
```

Shape Vectors: - Rectangular Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

```
+0.589975 +0.015651 -0.807270
+0.571408 +0.698292 +0.431139
+0.570458 -0.715642 +0.403031
```

Amplitudes of the Shape Vectors: - Column Vector - (1-3) of (1):

```
+1.000000
+1.000000
+1.000000
```

Results for Modal Matching:

With:

First mode to be considered: 1.

Percentage of modes to be considered: 100.000000.

Minimum difference if the eigenValues to be a considered mode: 0.000000.

Maximum correlation level to be a good matching: 1.000000.

Number of matched pixels used to find the rigid transformation: 3.

Selected EigenValues (vibration's frequencies) for contour t - Diagonal Matrix - (1-3) of (3):

```
+2.214174 +0.455153 +0.330673
```

Selected EigenVectors (shape vectors) for contour t - Rectangular Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

```
+0.596025 +0.042197 -0.801856
+0.569806 +0.681377 +0.459398
+0.565752 -0.730716 +0.382073
```

Selected EigenValues (vibration's frequencies) for contour t+1 - Diagonal Matrix - (1-3) of (3):

```
+2.213542 +0.434408 +0.352050
```

Selected EigenVectors (shape vectors) for contour t+1 - Rectangular Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

```
+0.589975 +0.015651 -0.807270
+0.571408 +0.698292 +0.431139
+0.570458 -0.715642 +0.403031
```

Figura 129 - Conteúdo do ficheiro de resultados obtido pela implementação do método proposto nesta comunicação.

Correlation Matrix – Rectangular Matrix - (1-3x1-3) of (3x3):

```
+0.000771 +1.951344 +2.026729
+2.048044 +0.001087 +1.954839
+1.972187 +2.044502 +0.000689
```

Centroid of the contour in image t: (117.009027, 112.664379).

Centroid of the contour in image t+1: (132.670518, 104.665309).

Translation between the contours: 77.111303 along x, 57.815903 along y.

Scale between the contours: 0.447418 along x and y.

Rotation between the contours: 356.222432.

Pixel 1 in contour t with (117, 49) matched with Pixel 1 in contour t+1 with (131, 75).

Pixel 2 in contour t with (49, 143) matched with Pixel 2 in contour t+1 with (104, 121).

Pixel 3 in contour t with (185, 146) matched with Pixel 3 in contour t+1 with (163, 118).

Figura 129 - Continuação.

Dos resultados experimentais obtidos podemos concluir:

- Quando a deformação existente entre os dois contornos é essencialmente rígida poucos modos (geralmente, apenas três modos) de vibração são necessários para obter-se emparelhamentos aceitáveis;
- Geralmente são obtidos melhores resultados de emparelhamento utilizando-se valores para σ iguais à média da distância entre todos os *pixels* que constituem cada contorno;
- A utilização de valores reduzidos/elevados para os valores de σ torna impossível obter-se emparelhamentos aceitáveis;
- A não inclusão dos modos de alta frequência, em geral, favorece a obtenção de melhores emparelhamentos;
- O nível de limiar para um emparelhamento ser considerado como possível parece não ter influência nos resultados obtidos (a exigência de mínimo na linha e na coluna parece ser suficiente);
- A não consideração na base modal dos modos de vibração que tenham frequências praticamente iguais favorece os resultados de emparelhamento obtidos;
- Para obter-se bons resultados de emparelhamento a relação entre os valores de σ_t e σ_{t+1} deve reflectir a escala existente entre cada contorno de modo que os dois conjuntos de valores próprios tenham a mesma ordem de grandeza;
- Por vezes a inclusão dos *pixels* de elevada curvatura resolve os casos para os quais é impossível obter-se emparelhamentos satisfatórios;
- Os emparelhamentos obtidos são de melhor qualidade se a deformação existente entre os dois contornos não é apenas restrita a uma reduzida zona dos mesmos.

4 - Conclusões e perspectivas de benefício

Nesta comunicação é apresentado um método para o emparelhamento dos *pixels* que constituem dois contornos baseado numa descrição modal da forma de cada contorno. Este método, inicialmente proposto por Shapiro [Shapiro, 1991, 1992, 1992a], teve como base o método proposto por Scott e Longuet-Higgins denominado por “princípio do mapeamento da distância mínima”. O método de base é também apresentado nesta comunicação e obtém bons

resultados quando a transformação geométrica existente entre os dois contornos engloba uma rotação no plano imagem de reduzido valor. Shapiro verificando que este método não entrava em consideração com a estrutura de cada objecto, e assim não obtinha bons resultados para os casos de rotações elevadas, desenvolveu um novo método baseado nos valores e vectores próprios de cada contorno. Assim neste método é construída para cada objecto uma matriz de distâncias entre os *pixels* do contorno (a função de distância é a função Gaussiana) são determinados os valores e os vectores próprios de cada uma destas matrizes e, finalmente, para os emparelhamentos serem estabelecidos os deslocamentos de cada *pixel* na base modal de cada contorno são comparados. Os *pixels* que apresentarem deslocamentos similares para cada base modal são então emparelhados. Este método tem a vantagem de entrar com a estrutura presente em cada contorno (sendo a influência dos *pixels* vizinhos controlada pela largura da função Gaussiana) e incluir uma descrição hierárquica em que os modos de baixa frequência estão associados a transformações globais e os de alta a transformações locais. Com este tipo de hierarquia torna-se possível a consideração, para o estabelecimento dos emparelhamentos, de apenas um reduzido conjunto de vectores modais de forma a reflectir o tipo de transformação existente. Como o sinal dos vectores próprios é indefinido Shapiro desenvolveu um algoritmo para a determinação dos mesmos. Este algoritmo, apresentado nesta comunicação, determina os sinais dos vectores modais de forma a maximizar o número de emparelhamentos obtidos. Por vezes, o sinal de um vector modal é indiferente para o algoritmo (tal facto traduz uma reflexão de simetria) esta indefinição é resolvida por uma consideração arbitrária. Tal situação podia ser resolvida guardando-se a identificação dos modos de reflexão e no final da determinação dos sinais utilizar-se um outro critério (por exemplo de distância mínima [Shapiro, 1991]) para estabelecer o sinal mais correcto para estes.

Nesta comunicação é analisada a descrição da forma de um contorno por intermédio dos modos de vibração e é verificada e discutida a influência da largura da curva Gaussiana, do número de modos de vibração utilizados e de cada modo na mesma.

Várias experiências, algumas das quais apresentadas nesta comunicação, para o emparelhamento dos *pixels* que constituem contornos de objectos reais e não reais foram efectuadas por uma implementação do método proposto por Shapiro. Também é verificada e analisada a influência nos resultados obtidos da largura da curva Gaussiana, do número de modos considerados, de cada modo considerado, do tipo de transformação rígida existente entre os dois contornos e a consideração dos *pixels* de elevada curvatura. Dos resultados obtidos pode-se concluir que para emparelhamentos aceitáveis o valor para cada σ deve ser igual à média da distância entre todos os *pixel* que definem cada contorno, são necessários poucos modos de vibração, os modos de alta frequência não devem ser considerados e deve-se retirar de cada base modal os modos com frequências de valor muito semelhante. Dos mesmos, verifica-se que o método obtém emparelhamentos aceitáveis quer para contornos de objectos reais quer para de não reais. As transformações rígidas determinadas, após o estabelecimento das correspondências, revelaram-se de qualidade aceitável o que pode ser útil para a decomposição da transformação global em rígida e não rígida.

Em algumas situações, os emparelhamentos não podiam ser estabelecidos de forma aceitável quando apenas eram considerados apenas os *pixels* dos contornos amostrados, considerando-se também os *pixels* de elevada curvatura (aumenta-se o número de *pixels* de cada contorno nas zonas de elevada curvatura e torna-se os contornos mais rígidos junto a estas) os emparelhamentos já podiam ser determinados de forma satisfatória.

Este método não funciona correctamente se os contornos não são totalmente considerados pois a oclusão é reflectida na forma dos vectores modais e os estabelecimentos não podem ser determinados de forma correcta. Uma solução para este problema poderia passar pela utilização de filtros de Kalman [Maybeck 1979; Tavares, 1995, 1995a]. Por exemplo, um

filtro poderia ser utilizado para estimar os vectores *pixel* (truncados a poucos modos) e fornecer uma estimativa ao longo do tempo dos deslocamentos de cada *pixel* na base modal. Outra solução poderia passar pela utilização de um filtro para estimar a posição de pontos característicos dos contornos (por exemplo pontos de elevada curvatura) e utilizar a estimativa para alinhar os contornos.

O método de Shapiro só funciona para o estabelecimento de correspondências entre os *pixels* de dois contornos. Uma solução, para utilizar este método quando existem mais do que dois contornos, poderá passar pela utilização de um filtro de Kalman desenhado para estimar ao longo do tempo a posição do centroide do contorno em questão e utilizar esta informação para identificar com qual contorno deve ser efectuado o emparelhamento.

Quando os contornos se fundem ou se dividem o método de Shapiro torna-se inútil pois tais mutações nas formas dos contornos reflecte-se nas formas dos vectores modais e os emparelhamentos não podem ser estabelecidos de maneira satisfatória. Em certos casos, uma solução possível poderia passar pela utilização de modelos superficiais em que a terceira coordenada poderia ser, por exemplo, o nível de intensidade. A consideração da terceira coordenada neste método é trivial.

Outras melhorias que poderiam ser introduzidas no método de Shapiro na fase de estabelecimento das correspondências são: para rotações de valor reduzido as correspondências que atravessam o contorno do objecto deveriam ser rejeitadas; um *pixel* que não tenha sido emparelhado mas que tenha os seus *pixels* vizinhos devidamente emparelhados deve ser emparelhado de forma a ficar com os mesmos *pixels* como vizinhos; após a aplicação da transformação rígida determinada a um dos contornos, *pixels* não emparelhados poderiam ser emparelhados de forma a minimizar a distância percorrida (isto é, minimizando a deformação local).

Agradecimentos

Agradeço à Junta Nacional de Investigação Científica a bolsa de doutoramento que me concedeu (referência: BD/3243/94 - PRAXIS XXI).

Agradeço ao Prof. Larry Shapiro o envio do relatório “*Towards A Vision-Based Motion Framework*” e dos artigos “*Feature-based Correspondence: an Eigenvector Approach*” e “*A Modal Approach to Feature-based Correspondence*”, e a disponibilidade demonstrada.

Bibliografia

[Bathe, 1996] - *Klaus-Jürgen Bathe*
Finite Element Procedures
PRENTICE HALL - 1996

[Chapra, 1988] - *Steven C. Chapra, Raymond P. Canale*
Numerical Methods for Engineers
MCGRAW-HILL - 1988

[Foley, 1991] - *Foley, vanDam, Feiner, Hughes*
Computer Graphics Principles and Practice
ADDISON WESLEY 12110 - 1991 SECOND EDITION

[Hall, 1993] - *Ernest L. Hall*
Fundamental principles of robot vision
SPIE VOL. 2056 INTELLIGENT ROBOTS AND COMPUTER VISION XII (1993) - 321/333

[Horn, 1987] - *Berthold K. P. Horn*

Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions

JOURNAL OF THE OPTICAL SOCIETY OF AMERICA A, VOL. 4, 629/642, APRIL 1987

[Kelly, 1993] - *S. Graham Kelly*

Fundamentals of Mechanical Vibrations

MCGRAW-HILL - 1993

[Maybeck, 1979] - *Peter S. Maybeck*

Stochastic Models, Estimation, and Control

Volume I

Mathematics In Science and Engineering - Volume 141

ACADEMIC PRESS - 1979

[Meirovitch, 1986] - *Leonard Meirovitch*

Elements of Vibration Analysis

MCGRAW-HILL - 1986

[Press, 1992] - *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery*

Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS - 1992 SECOND EDITION

[Sclaroff, 1993] - *Stan Sclaroff, Alex Pentland*

Modal matching for correspondence and recognition

M.I.T. MEDIA LABORATORY - Nº 201 - MAY 1993

[Shapiro, 1991] - *Larry Shapiro*

Report: Towards A Vision-Based Motion Framework

ROBOTICS RESEARCH GROUP - DEPARTMENT OF ENGINEERING SCIENCE

OXFORD UNIVERSITY - MAY 25, 1991

[Shapiro, 1992] - *Larry Shapiro, J. Michael Brady*

A Modal Approach to Feature-based Correspondence

ROBOTICS RESEARCH GROUP - DEPARTMENT OF ENGINEERING SCIENCE

OXFORD UNIVERSITY - 1992

[Shapiro, 1992a] - *Larry Shapiro, J. Michael Brady*

Feature-based correspondence: an eigenvector approach

BUTTERWORTH-HEINEMANN LTD, VOL 10 NO 5 - JUNE 1992

[Tavares, 1995] - *João Manuel R. S. Tavares*

Algumas Ferramentas para Visão Tridimensional por Computador

Publicação inserida na dissertação submetida ao Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores em 1995, para satisfação parcial dos requisitos do Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores.

Orientador: *A. Jorge Padilha*

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

[Tavares, 1995a] - *João Manuel R. S. Tavares*

Obtenção de Estrutura Tridimensional a Partir de Movimento de Câmara

Dissertação submetida ao Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores em 1995, para satisfação parcial dos requisitos do Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores.

Orientador: *A. Jorge Padilha*

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1995

[Tavares, 1997] - *João Manuel R. S. Tavares*

Comunicação Interna: Apresentação de um Método para a Determinação da Transformação Rígida entre dois Contornos Constituídos por *Pixels*

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO - 1997

